ВІД РЕДАКТОРА

У пропонованому посібнику розглядається система завдань з тем: «Алгебра», «Геометрія», «Комбінаторика», «Теорія чисел», «Конструкції», для яких наведені зразки міркувань і розв'язування та система задач для самостійного розв'язування. Вдалий і цікавий за змістом підбір різнорівневих завдань з означених тем дозволить учневі самостійно чи під керівництвом учителя познайомитися з різноманітними методами розв'язування олімпіадних задач з математики, підготуватися до виступу на олімпіадах різного рівня. Вважаємо за потрібне попередити, що знайомство з однією цією книжкою ще не забезпечить успіху у виступах на олімпіадах.

У цілому підготовка до олімпіади повинна здійснюватись постійно і планомірно. Перш за все, необхідно опрацювати теоретичний матеріал. Розділ пропонованої книги «Допоміжні теоретичні відомості» є орієнтиром для цього. Потім бажано закріпити і поглибити теоретичні знання, попрацювавши з додатковою літературою, почати розв'язувати задачі й поступово переходити до розв'язування більш складних задач.

Спочатку намагайтесь розв'язати самостійно кожну задачу без жодної додаткової літератури. Якщо спроба не вдалася, то зверніться до посібників. І це не допомогло? Тоді з олівцем і чернеткою опрацюйте авторське розв'язання. Зауважимо, що коли ви просто читаєте розв'язання, то досить часто здається, що все зрозуміло. Але якщо через тиждень доведеться розв'язувати ту ж саму задачу, то далеко не завжди ви зможете її відтворити. Тому потрібно опрацьовувати розв'язання з олівцем, а через деякий час розв'язати її знову й самостійно. Якщо задачу можна розв'язати іншим способом, спробуйте це зробити. На олімпіадах часто дають додаткові бали за оригінальне розв'язання або розв'язання кількома способами.

Навчайтеся розв'язувати математичні задачі! Не проминіть можливості зазнати інтелектуальної насолоди, розкриваючи свій розум назустріч істині. Адже, як писав Пойя у своєму «Математичному відкритті», «немає нічого простішого для наймолодших, ніж придушити в собі подібні відчуття і назавжди обмежити свою думку».

АЛГЕБРА

Задача 1

Знайти найбільший член послідовності $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots, \sqrt[n]{n}, \ldots$.

Розв'язання

Найбільшим членом послідовності є $\sqrt[3]{3}$. Очевидно, що $1 < \sqrt[3]{3}$ і $\sqrt[2]{2} < \sqrt[3]{3}$. Покажемо, що $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ для $n \geq 3$. Остання нерівність рівносильна наступній:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$$

для $n \geq 3$.

Проте, як відомо, послідовність $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ є зростаючою, причому її границя дорівнює числу e, яке менше за 3. Отже, записана нерівність є правильною і найбільшим членом послідовності $\left(\sqrt[n]{n}\right)$ є $\sqrt[3]{3}$.

Відповідь. $\sqrt[3]{3}$.

Задача 2

Довести, що якщо a, b, c — непарні цілі числа, то корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не можуть бути раціональними.

Розв'язання

Припустимо супротивне. Нехай $\frac{p}{q}$ (причому $(p, q) = 1$) – раціональний корінь рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Тоді $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$.

Останнє співвідношення показує, що a ділиться на q, c ділиться на p. Оскільки, згідно з умовою задачі, a, b, c — непарні числа, то непарними повинні бути і числа p та q. Але тоді в лівій частині останньої рівності стоїть сума трьох непарних чисел, і тому вона не може дорівнювати нулю. Отже, корені квадратного рівняння в такому випадку не можуть бути раціональними.

Задача 3

Довести, що

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}$$

для додатних дійсних чисел a і b, таких, що $a+b=1$.

Розв'язання

Виконаємо перетворення:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}+b^2+\frac{1}{b^2}+4=$$

$$=(a+b)^2-2ab+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2-\frac{2}{ab}+4=1-2ab+\frac{1-2ab}{a^2b^2}+4=$$

$$=(1-2ab)\left(1+\frac{1}{a^2b^2}\right)+4.$$

Використовуючи співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним маємо: $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, тоді

$$(1-2ab)\left(1+\frac{1}{a^2b^2}\right)+4\geq\frac{1}{2}\cdot17+4=\frac{25}{2},$$

що і треба було довести.

Задача 4

Довести, що не існує різних натуральних чисел a, b, c, d, таких, що:

$$a^3+b^3=c^3+d^3 \text{ і } a+b=c+d$$

Розв'язання

Припустимо, що існують різні натуральні числа a, b, c, d такі, що

$$a^3+b^3=c^3+d^3$$

$$a+b=c+d.$$

З першої рівності випливає:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=(c+d)(c^2-cd+d^2)$$

$$a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2$$

$$(a+b)^2-3ab=(c+d)^2-3cd.$$

З останньої рівності випливає, що $ab = cd$. Але тоді $(a-b)^2 = (c-d)^2$ або $a-b = \pm(c-d)$. Якщо $a-b = c-d$, то $a = c$ і $b = d$. Якщо $a-b = -(c-d)$, то $a = d$ і $b = c$. Це суперечить припущенню, що числа a, b, c, d різні. Отже, таких чисел не існує.

Задача 5

Нехай $a_0, a_1, ..., a_{50}$ — коефіцієнти многочлена $(1+x+x^2)^{25}$.

Довести, що сума $a_0 + a_2 + \ldots + a_{50}$ — парне число.

Розв'язання

Поклавши $x = 1$ в тотожності

$$(1+x+x^2)^{25} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{50} x^{50},$$

отримуємо:

$$3^{25} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{50}.$$

Аналогічно, за підстановки $x = -1$ отримуємо:

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{50}.$$

Додавши дві отримані рівності, матимемо:

$$1 + 3^{25} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{50}).$$

Проте $1 + 3^{25} = 3^{25} - 1 + 2 = 2(3^{24} + 3^{23} + 3^{22} + \ldots + 1 + 1)$. У дужках — парне число, а отже, й сума $a_0 + a_2 + \ldots + a_{50}$ — також парне число.

Задача 6

Довести, що для довільних відмінних від нуля дійсних чисел a, b, c, d не всі корені рівняння $x^6 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ дійсні.

Розв'язання

Нехай $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_6$ — дійсні корені рівняння

$$x^6 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Оскільки числа a, b, c, d відмінні від нуля, то принаймні один з коренів x_i повинен бути відмінним від нуля. Використовуючи співвідношення між коефіцієнтами та коренями зведеного многочлена, маємо: $\sum_{j=1}^{6} x_j = 0$, $\sum_{1 \le i < j \le 6} x_i x_j = 0$, тому

$$\sum_{j=1}^{6} x_j^2 = \left(\sum_{j=1}^{6} x_j^6\right) - 2\sum_{1\le i<j\le 6} x_i x_j = 0.$$

Таким чином, ми отримали, що сума квадратів коренів рівняння дорівнює нулю, а це можливо, коли всі корені — дійсні числа та дорівнюють нулю, що суперечить тому, що хоча б один з коренів x_j повинен бути відмінним від нуля.

Тобто серед x_j не всі дійсні числа.

Задача 7

Відомо, що рівняння $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ має чотири дійсних додатних корені. Довести, що:

а) $pr - 16s \ge 0$;

б) $q^2 - 36s \ge 0$,

причому показати, що рівність досягається тоді й тільки тоді, коли всі чотири корені рівні між собою.

Розв'язання

Нехай x_1, x_2, x_3, x_4 — корені рівняння $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$.

Тоді маємо:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -p,$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = q,$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -r,$$
$$x_1x_2x_3x_4 = s.$$

Використовуючи співвідношення між середнім арифметичним і середнім гармонійним додатних чисел, маємо:

$$pr = \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}\right) x_1x_2x_3x_4 \ge 16s.$$

Аналогічно, використовуючи співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним, маємо:

$$q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \ge 6\left(x_1^3x_2^3x_3^3x_4^3\right)^{\frac{1}{6}} = 6s^{\frac{1}{2}}.$$

Із останнього співвідношення маємо: $q^2 \ge 36s$. Зауважимо, що рівність досягається в обох випадках лише тоді, коли $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Задача 8

Дано дійсні числа a, b, c такі, що $0<a<1$, $0<b<1$, $0<c<1$ і $a+b+c=2$. Довести, що $\frac{a}{1-a}\cdot\frac{b}{1-b}\cdot\frac{c}{1-c}\geq 8$.

Розв'язання

Введемо наступні заміни: $x=1-a$, $y=1-b$, $z=1-c$. Тоді нерівність, яку слід довести, набуває вигляду:

$$\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-y}{y}\cdot\frac{1-z}{z}\geq 8, \qquad (1)$$

причому $0<x<1$, $0<y<1$, $0<z<1$, $x+y+z=1$. Нерівність (1) може бути записана таким чином: $(1-x)(1-y)(1-z)\geq 8xyz$.

Розкриваючи дужки в лівій частині і використовуючи те, що $x+y+z=1$, дістаємо наступну нерівність: $xy+yz+zx\geq 9xyz$ або $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 9$.

Проте остання нерівність є наслідком співвідношення між середнім арифметичним і середнім гармонійним для трьох додатних чисел x, y та z. Рівність наступає лише при $x=y=z=\frac{1}{3}$, тобто коли $a=b=c=\frac{2}{3}$.

Задача 9

Довести, що $1<\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+\ldots+\frac{1}{3001}<\frac{4}{3}$.

Розв'язання

Розглянемо 2001 число вигляду $\frac{1}{k}$, де $1001\leq k\leq 3001$. Використовуючи співвідношення між середнім арифметичним і середнім гармонійним, отримаємо: $\left(\sum_{k=1001}^{3001}k\right)\left(\sum_{k=1001}^{3001}\frac{1}{k}\right)>2001^2$.

Але $\sum_{k=1001}^{3001}k=2001^2$, отже, матимемо $\sum_{k=1001}^{3001}\frac{1}{k}>1$.

З іншого боку:

$$S=\sum_{k=1001}^{3001}\frac{1}{k}<\frac{500}{1000}+\frac{500}{1500}+\frac{500}{2000}+\frac{500}{2500}+\frac{1}{3001}<$$
$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3000}=\frac{3851}{3000}<\frac{4}{3}.$$

Задача 10

Нехай x, y, z – три дійсних числа, такі, що $x+y+z=4$ та $x^2+y^2+z^2=6$.

Довести, що кожне з чисел x, y, z належить відрізку $\left[\frac{2}{3};\ 2\right]$. Чи може x набувати значення $\frac{2}{3}$ та 2?

Розв'язання

Маємо: $y+z=4-x$, $y^2+z^2=6-x^2$.

Правильною є нерівність $y^2+z^2\geq\frac{1}{2}(y+z)^2$ (нерівність Коші-Шварца). Тому $6-x^2\geq\frac{1}{2}(4-x)^2$.

Остання нерівність рівносильна наступній: $(3x-2)(x-2)\leq 0$. Отже, маємо: $\frac{2}{3}\leq x\leq 2$. Покладемо $x=2$. Тоді $y+z=2$ і $y^2+z^2=2$, звідки отримуємо єдиний розв'язок при $y=z=1$. Аналогічно, при $x=\frac{2}{3}$ отримуємо: $y+z=\frac{10}{3}$, $y^2+z^2=\frac{50}{9}$, звідки $y=z=\frac{5}{3}$. Отже, оскільки змінні симетричні, то вони належать відрізку $\left[\frac{2}{3};\ 2\right]$.

Задача 11

Нехай $f(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами і нехай існує п'ять різних цілих чисел a_1, a_2, a_3, a_4 та a_5, таких, що $f(a_i)=2$ для $1\leq i\leq 5$. Довести, що не існує цілого числа b, такого, що $f(b)=9$.

Розв'язання

Розглянемо многочлен $f(x)-2$. Його коренями, згідно з умовою, повинні бути числа a_1, a_2, a_3, a_4 та a_5, тобто:

$$f(x)-2=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)g(x),$$

де $g(x)$ — деякий многочлен з цілими коефіцієнтами. Якщо існує ціле b, таке, що $f(b)=9$, то $7=(b-a_1)(b-a_2)(b-a_3)(b-a_4)(b-a_5)g(b)$, що неможливо, оскільки числа $b-a_1$, $b-a_2$, $b-a_3$, $b-a_4$ та $b-a_5$ усі цілі і різні, а число 7 не може бути подано у вигляді добутку більше ніж трьох множників (у найкращому випадку може подаватися так: 7 = (– 7)(– 1)(1)).

Задача 12

Знайти всі функції $f: R\setminus\{0,1\}$, які задовольняють наступні умови:

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2(1-2x)}{x(1-x)},$$

для $x\neq 0$ і $x\neq 1$.

Розв'язання

Покладемо $y=\frac{1}{1-x}$. Тоді подане функціональне рівняння може бути записане так: $f(x)+f(y)=2\left(\frac{1}{x}-y\right)$.

Якщо ми позначимо $z=\frac{1}{1-y}$, то $x=\frac{1}{1-z}$. Тоді отримаємо ще два співвідношення: $f(y)+f(z)=2\left(\frac{1}{y}-z\right)$, $f(z)+f(x)=2\left(\frac{1}{z}-x\right)$.

Додавши першу і третю рівності, отримаємо:

$$2f(x)+f(y)+f(z)=2\left(\frac{1}{x}-x\right)-2y+\frac{2}{z}.$$

Використовуючи друге співвідношення, матимемо:

$$2f(x)=2\left(\frac{1}{x}-x\right)-2\left(\frac{1}{y}+y\right)+2\left(\frac{1}{z}+z\right).$$

Проте $y+\frac{1}{y}=\frac{1}{1-x}+1-x$, $z+\frac{1}{z}=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x-1}$. Підставивши в останню рівність, отримаємо:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}.$$

Таким чином, перевірка показує, що $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, де $x\neq 0$, $x\neq 1$ — єдина функція, що задовольняє дане функціональне рівняння.

Відповідь. $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, де $x\neq 0$, $x\neq 1$.

Задача 13

Нехай $p(x)=x^2+ax+b$ — квадратний тричлен, у якого коефіцієнти a і b — цілі. Дано довільне натуральне число n. Довести, що існує ціле число M, таке, що $p(n)p(n+1)=p(M)$.

Розв'язання

Виконаємо рівносильні перетворення:

$$p(n)p(n+1)=(n^2+an+b)\left((n+1)^2+a(n+1)+b\right)=n^2(n+1)^2+$$

$$+a\left[n(n+1)^2+n^2(n+1)\right]+b\left[n^2+(n+1)^2\right]+a^2n(n+1)+b^2+ab(2n+1)=$$

$$=n^2(n+1)^2+a^2n^2+b^2+2an^2(n+1)+2bn(n+1)+2nab+a^2n+an(n+1)+$$

$$+ab+b=\left[n(n+1)+an+b\right]^2+a\left[n(n+1)+an+b\right]+b=$$

$$=p\left(n(n+1)+an+b\right)=P(M),$$

де M — вочевидь, ціле.

Задача 14

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — n різних непарних натуральних чисел, жодне з яких не ділиться ні на яке просте число більше за 5. Довести, що:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}<2.$$

Розв'язання

Якщо $a>1$, то для будь-якого натурального m:

$$1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots+\frac{1}{a^m}=\frac{1-\frac{1}{a^{m+1}}}{1-\frac{1}{a}}<\frac{a}{a-1}.$$

Припустимо, що a_1, a_2, ..., a_n — n різних непарних натуральних чисел, жодне з яких не ділиться ні на яке просте число більше за 5. З цього випливає, що для кожного i або $a_i = 1$, або a_i серед простих дільників має лише 3 або 5. Тоді для достатньо великого m матимемо:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^m}\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^m}\right)<\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{8}<2.$$

Задача 15

Нехай дано многочлен $p(x)$ з цілими коефіцієнтами і три різних цілих числа a, b, c. Довести, що не може статись так, що $p(a) = b$, $p(b) = c$ і $p(c) = a$.

Розв'язання

Припустимо, що існують різні цілі числа a, b і c, такі, що $p(a) = b$, $p(b) = c$, $p(c) = a$. Тоді $p(a) - p(b) = b - c$, $p(b) - p(c) = c - a$, $p(c) - p(a) = a - b$.

Але для довільних різних чисел m і n, $p(m) - p(n)$ ділиться на $m - n$. Таким чином, ми маємо: $b - c \,\vdots\, a - b$, $c - a \,\vdots\, b - c$, $a - b \,\vdots\, c - a$, звідки $a = b = c$, що суперечить нашому припущенню. Отже, не існує різних цілих чисел a, b, c, таких, що $p(a) = b$, $p(b) = c$ і $p(c) = a$.

Задача 16

Нехай a, b, c — сторони трикутника. Довести, що

$$\frac{3}{2}\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2.$$

Розв'язання

Зазначимо, що даний вираз $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ дорівнює:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)-3,$$

який у свою чергу дорівнює такому:

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)-3.$$

Із співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним матимемо:

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)-3\geq\frac{1}{2}\cdot 9-3=\frac{3}{2}.$$

Рівність у цьому випадку виконується лише при $a=b=c$.

Припустимо, що a, b і c впорядковані, тобто $a\leq b\leq c$. Тоді:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leq\frac{a}{a+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1+\frac{c}{a+b}<1+1=2,$$

оскільки $c<a+b$, згідно з нерівністю трикутника.

Задача 17

Дано функцію f, що означена на множині цілих невід'ємних чисел і набуває значення з цієї ж множини і задовольняє умови:

а) $x-f(x)=19\left[\frac{x}{19}\right]-90\left[\frac{f(x)}{90}\right]$;

б) $1900<f(1990)<2000$.

Знайти всі можливі значення $f(1990)$.

Розв'язання

З умови а) випливає:

$$f(1990)-90\left[\frac{f(1990)}{90}\right]=1990-19\left[\frac{1990}{19}\right]=1990-1976=14.$$

З нерівності б) випливає:

$$\frac{1990}{90}<\frac{f(1990)}{90}<\frac{2000}{90}\text{ або }21\frac{10}{90}<\frac{f(1990)}{90}<22\frac{20}{90}.$$

Таким чином, $\left[\frac{f(1990)}{90}\right]=21$ або $\left[\frac{f(1990)}{90}\right]=22$.

Якщо $\left[\frac{f(1990)}{90}\right]=21$, то $f(1990)=14+90\cdot 21=1904$, якщо $\left[\frac{f(1990)}{90}\right]=22$, то $f(1990)=1994$.

Відповідь. Якщо $\left[\frac{f(1990)}{90}\right]=21$, то $f(1990)=1904$, якщо $\left[\frac{f(1990)}{90}\right]=22$, то $f(1990)=1994$.

Задача 18

Довести, що для додатних дійсних чисел a, b, c, d, які задовольняють нерівність $a+b+c+d \le 1$, виконується нерівність:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c} \le \frac{1}{64abcd}.$$

Розв'язання

Дана нерівність еквівалентна наступній:

$$a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab \le \frac{1}{64}.$$

Помітимо, що $a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab=(ac+bd)(ad+bc)$. Тоді, використовуючи нерівність $xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$, ми отримуємо:

$$a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab \le \frac{(ac+bd+ad+bc)^2}{4}.$$

Проте $ac+bd+ad+bc=(a+b)(c+d)$. Ще раз застосувавши нерівність $xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$, матимемо: $ac+bd+ad+bc \le \frac{(a+b+c+d)^2}{4}$. Поєднуючи дві отримані нерівності і використовуючи умову, що $a+b+c+d \le 1$, отримуємо: $a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab \le \frac{1}{64}$.

Задача 19

Знайти всі многочлени третього степеня $p(x)$, для яких $p(x)+2$ ділиться на $(x-1)^2$, а $p(x)-2$ ділиться на $(x+1)^2$.

Розв'язання

Якщо многочлен $q(x)$ ділиться на $x-\alpha$, то $q(\alpha)=0$. Нехай $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Оскільки $p(x)+2$ ділиться на $x-1$, то $a+b+c+d+2=0$, звідки $d=-a-b-c-2$, і тоді:

$$p(x)+2=a(x^3-1)+b(x^2-1)+c(x-1)=(x-1)(a(x^2+x+1)+b(x+1)+c).$$

Оскільки $p(x)+2$ ділиться на $(x-1)^2$, то на $x-1$ повинен ділитись квадратний тричлен $a(x^2+x+1)+b(x+1)+c$. З цього випливає, що $3a+2b+c=0$. Аналогічно, використовуючи те, що $p(x)-2$ ділиться на

$(x+1)^2$, ми отримаємо ще дві рівності: $-a+b-c+d=0$ і $3a-2b+c=0$. Отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} a+b+c+d+2=0, \\ 3a+2b+c=0, \\ -a+b-c+d-2=0, \\ 3a-2b+c=0. \end{cases}$$

Розв'язуючи її відносно a, b, c, d, знаходимо, що $b=d=0$, $a=1$, $c=-3$. Отже, єдиним многочленом третього степеня, що задовольняє даним умовам є многочлен $p(x)=x^3-3x$.

Відповідь. $p(x)=x^3-3x$.

Задача 20

Розв'язати рівняння $\dfrac{1}{[x]}+\dfrac{1}{[2x]}=\{x\}+\dfrac{1}{3}$.

(Тут $[x]$ — найбільше ціле число, що не перевищує x; $\{x\}=x-[x]$.)

Розв'язання

Оскільки права частина рівняння додатна, то такою повинна бути й ліва частина, тобто $x>0$.

Нехай $x=n+f$, де $n=[x]$, $f=\{x\}$. Розглянемо два випадки:

а) $0\le f<\dfrac{1}{2}$. У цьому випадку, отримуємо: $[2x]=[2n+2f]=2n$, оскільки $2f<1$. Тоді рівняння набуде вигляду: $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2n}=f+\dfrac{1}{3}$.

З останньої рівності випливає, що $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2n}\ge\dfrac{1}{3}$. Тоді $2n-9\le 0$. Отже, n може набувати значення 1, 2, 3, 4. Серед них 2, 3, 4 дають відповідні значення для f, що дорівнюють $\dfrac{5}{12}$, $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{24}$, які менші за $\dfrac{1}{2}$, а отже, задовольняють перший випадок. При $n=1$ отримуємо значення для f, яке більше за $\dfrac{1}{2}$. Отже, в випадку а) маємо 3 корені:

$$x=2+\frac{5}{12}=\frac{29}{12};\ x=3+\frac{1}{6}=\frac{19}{6};\ x=4+\frac{1}{24}=\frac{97}{24}.$$

б) $\frac{1}{2} \le f < 1$. У цьому випадку маємо: $[2x] = 2n+1$, оскільки $1 \le 2f < 2$.

Дане рівняння еквівалентне наступному: $\frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} = f + \frac{1}{3}$.

Як і в першому випадку, з останньої рівності випливає нерівність: $\frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} \ge \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. З цієї нерівності маємо, що $10n^2 - 13n - 6 \le 0$. Звідси матимемо, що $n = 1$. Проте це неможливо, оскільки при $n = 1$ отримуємо: $f = 1$. У випадку б) немає розв'язків.

Отже, дане рівняння має три корені: $\frac{29}{12}, \frac{19}{6}, \frac{97}{24}$.

Відповідь. $\frac{29}{12}, \frac{19}{6}, \frac{97}{24}$.

Задача 21

Довести, що якщо числа p, q і r — корені кубічного рівняння $x^3 - 3px^2 + 3q^2x - r^3 = 0$, то $p = q = r$.

Розв'язання

Використовуючи співвідношення між коренями і коефіцієнтами многочлена, отримуємо: $p + q + r = 3p$, $pq + qr + rp = 3q^2$, $pqr = r^3$.

З останньої рівності випливає, що або $r = 0$, або $pq = r^2$. Якщо $r = 0$, то $q = 2p$ і $pq = 3q^2$, тобто $p(2p) = 3(2p)^2$ і отже, $p = 0$. Тоді $q = 0$, і ми отримали результат, який і потрібно довести.

Нехай $pq = r^2$. Маємо: $q + r = 2p$, $r^2 + qr + rp = 3q^2$.

Помножимо перше рівняння на r і скористаємось другою рівністю. Отримаємо: $3pr = 3q^2$, тобто $pr = q^2$. Проте $pq = r^2$, тоді $q^3 = r^3$. Отже, або $q = r$, або $q^2 + qr + r^2 = 0$. В останньому випадку отримаємо: $0 = q^2 + qr + r^2 = pr + qr + pq = 3q^2$, тобто $q = 0$. Але тоді з рівності $pq = r^2$ випливає, що $r = 0$ і тоді $p = 0$. Якщо ж $q = r$, то з рівності $p + q + r = 3p$ отримуємо, що $2q = 2p$, тому $r = q = p$. В усіх розглянутих випадках ми отримуємо: $p = q = r$.

Задача 22

Знайти послідовність (a_n), для якої

$$a_1 = 1, a_2 = 2 \text{ і } a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2, n \ge 1.$$

Довести також, що для довільного m $a_m a_{m+1}$ є членом означеної послідовності.

Розв'язання

Розглянувши декілька перших членів послідовності, висуваємо гіпотезу: $a_n = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$.

Доведемо це співвідношення методом математичної індукції. Дійсно,

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2 = 2\left((n-1)^2 + 1\right) - \left((n-2)^2 + 1\right) + 2 =$$

$$= 2n^2 - 4n + 4 - \left(n^2 - 4n + 5\right) + 2 = n^2 + 1.$$

Маємо:

$$a_m a_{m+1} = \left((m-1)^2 + 1\right)\left(m^2 + 1\right) = m^2(m-1)^2 + m^2 + (m-1)^2 + 1 =$$

$$= \left(m(m-1) + 1\right)^2 + 1 = a_{m^2 - m + 2}.$$

Задача 23

Нехай a і b — два додатних дійсних числа, причому таких, що всі корені кубічного рівняння $x^3 - ax + b = 0$ дійсні, і нехай α — корінь цього кубічного рівняння, який має найменшу абсолютну величину. Довести, що $\dfrac{b}{a} < \alpha \le \dfrac{3b}{2a}$.

Розв'язання

Нехай α, β, γ — корені даного кубічного рівняння $x^3 - ax + b = 0$, де $a > 0$ і $b > 0$. Маємо систему:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = -a, \\ \alpha\beta\gamma = -b. \end{cases} \qquad (*)$$

З останнього рівняння системи встановлюємо, що або всі корені від'ємні, або два з них додатні, а один — від'ємний. Проте друге рівняння системи свідчить про те, що всі корені від'ємними бути не можуть. Отже, два числа з α, β, γ — додатні, а одне — від'ємне. З першого рівняння системи випливає, що від'ємний корінь за своєю абсолютною величиною більший за додатні. Отже, ми можемо стверджувати, що $\gamma < 0 < \alpha \le \beta$, причому $|\alpha| \le |\beta| \le |\gamma|$.

Маємо: $b-a\alpha=-\alpha\beta\gamma+\alpha(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)=\alpha^2(\beta+\gamma)=-\alpha^3<0$.

Оскільки $a>0$, то отримуємо, що $\frac{b}{a}<\alpha$. Перша нерівність доведена.

Далі:

$$3b-2a\alpha=-3\alpha\beta\gamma+2\alpha(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)=-\alpha\beta\gamma+2\alpha^2\beta+2\alpha^2\gamma=$$

$$=\alpha(2\alpha(\beta+\gamma)-\beta\gamma)=\alpha\left(-2(\beta+\gamma)^2-\beta\gamma\right)=-\alpha(2\beta^2+5\beta\gamma+2\gamma^2)=$$

$$=-\alpha(2\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)=-\alpha(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha).$$

Проте $-\alpha<0$, $\beta\geq\alpha, \gamma-\alpha<0$. Звідси випливає, що число $3b-2a\alpha$ — невід'ємне. Це доводить другу нерівність, тобто що $\alpha\leq\frac{3b}{2a}$.

Задача 24

Нехай a, b і c — три дійсних числа, такі, що: $1\geq a\geq b\geq c\geq 0$. Довести, що якщо λ — корінь кубічного рівняння $x^3+ax^2+bx+c=0$ (дійсний або комплексний), то $|\lambda|\leq 1$.

Розв'язання

Оскільки λ — корінь рівняння $x^3+ax^2+bx+c=0$, то

$$\lambda^3=-a\lambda^2-b\lambda-c.$$

З цього випливає

$$\lambda^4=-a\lambda^3-b\lambda^2-c\lambda=(1-a)\lambda^3+(a-b)\lambda^2+(b-c)\lambda+c.$$

Припустимо, що $|\lambda|\geq 1$. Тоді отримуємо:

$$|\lambda|^4\leq(1-a)|\lambda|^3+(a-b)|\lambda|^2+(b-c)|\lambda|+c\leq$$

$$\leq(1-a)|\lambda|^3+(a-b)|\lambda|^3+(b-c)|\lambda|^3+c|\lambda|^3\leq|\lambda|^3.$$

А це означає, що $|\lambda|\leq 1$. Тобто в цьому випадку єдино можливим варіантом є $|\lambda|=1$. Отже, доходимо висновку, що $|\lambda|\leq 1$.

ГЕОМЕТРІЯ

Задача 1

У трикутнику ABC $\angle A$ вдвічі більший за $\angle B$. Довести, що $a^2 = b(b+c)$.

Розв'язання

I спосіб

Розглянемо трикутник ABC, в якого $\angle A = 2\angle B$ (*рис. 1*). Продовжимо сторону CA до точки D таким чином, що $AD = AB$. Тоді трикутник ABD — рівнобедрений, отже, $\angle ADB = \angle ABD$. Проте

$$\angle ADB + \angle ABD = \angle BAC$$

(як зовнішній кут трикутника DAB). З цього випливає:

$$\angle ADB = \angle ABD = \frac{1}{2}\angle A = \angle B.$$

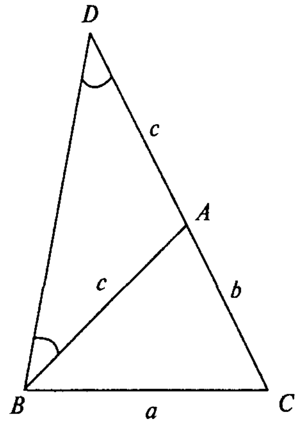


Рис. 1

Трикутники ABC і BDC подібні (оскільки $\angle ABC = \angle BDC$ і $\angle C$ — спільний). Тоді: $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC}$.

З цієї рівності і випливає: $a^2 = b(b+c)$.

II спосіб

Виконаємо тотожні перетворення і скористаємось теоремою синусів:

$$\angle A = 2\angle B \Leftrightarrow \angle A - \angle B = \angle B \Leftrightarrow \sin(\angle A - \angle B) = \sin\angle B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\angle A - \angle B)\sin(\angle A + \angle B) = \sin\angle B \sin\angle C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\angle A - \sin^2\angle B = \sin\angle B \sin\angle C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2R\sin\angle A)^2 - (2R\sin\angle B)^2 = 2R\sin\angle B \cdot 2R\sin\angle C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = bc \Leftrightarrow a^2 = b(b+c).$$

Задача 2

Два кола ω_1 і ω_2 перетинаються у двох різних точках P і Q на площині. Нехай l — деяка пряма, що проходить через точку P, перетинає кола ω_1 і ω_2 у точках A і B відповідно. Нехай Y — середина відрізка AB; відрізок QY перетинає кола ω_1 і ω_2 у точках X і Z відповідно. Довести, що точка Y є також серединою відрізка XZ.

Розв'язання

I спосіб

З'єднаємо точки P і Q, B і Z, A і X (*рис. 2*).

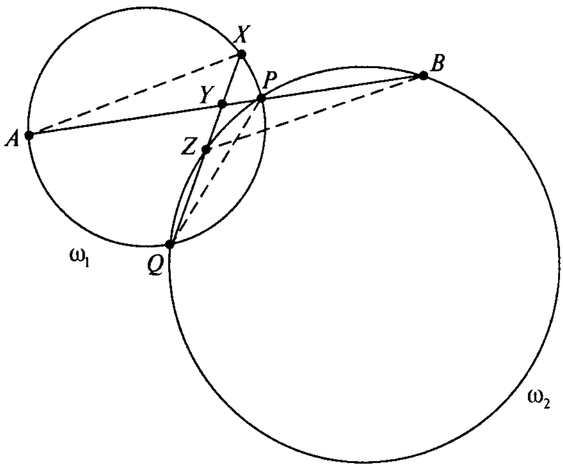


Рис. 2

У колі ω_2 маємо: $\angle ZBP = \angle ZQP$; у колі ω_1 маємо:

$$\angle PQX = \angle PAX.$$

Таким чином,

$$\angle ZBA = \angle BAX,$$

а це означає, що AX паралельно BZ. Трикутники AXY і BZY рівні (оскільки $AY = YB$ і кути AYX і YAX дорівнюють кутам BYZ і YBZ відповідно). З рівності цих трикутників випливає, що $XY = ZY$, що й потрібно було довести.

II спосіб

У колі ω_1 маємо: $AY \cdot YP = XY \cdot YQ$, згідно із властивістю хорд, що перетинаються. Аналогічно, в колі ω_2 хорди QZ і BP перетинаються в точці Y поза колом, тоді $YP \cdot YB = YZ \cdot YQ$. Ліві частини отриманих рівностей рівні між собою, оскільки, згідно з умовою, $AY = YB$. Тоді і праві частини рівні, тобто $XY \cdot YQ = YZ \cdot YQ$, з чого випливає, що $XY = YZ$.

Задача 3

Нехай $ABCD$ — вписаний чотирикутник, у якого діагоналі AC і BD перетинаються в точці P і нехай точка O — центр кола, описаного навколо трикутника APB, а точка H — ортоцентр трикутника CPD. Довести, що точки O, P і H лежать на одній прямій.

Розв'язання

Продовжимо OP до перетину із CD у точці L. Очевидно, достатньо довести, що PL перпендикулярно CD (*рис. 3*).

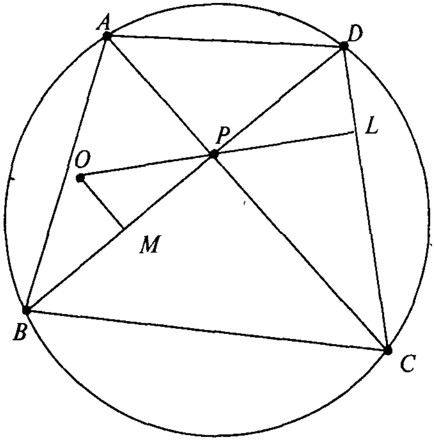


Рис. 3

Оскільки $ABCD$ — вписаний у коло чотирикутник, то $\angle PDL = \angle PAB$. Але точка O — центр кола описаного навколо трикутника APB. Тому

$$\angle PAB = \frac{1}{2}\angle POB$$

(якщо $\angle BAP$ — тупий, то

$$\angle PAB = 180° - \frac{1}{2}\angle POB.$$

Для цього випадку проведіть доведення самостійно).

Якщо OM — перпендикуляр до BP, то

$$\frac{1}{2}\angle POB = \angle POM = 90° - \angle OPM = 90° - \angle DPL.$$

Таким чином, маємо: $\angle PDL = 90° - \angle DPL$. Отже,

$$\angle PLD = 180° - (\angle PDL + \angle DPL) = 90°$$

і означає, що PL перпендикулярно CD.

Задача 4

Нехай $ABCD$ — вписаний чотирикутник, x, y, z — відстані від точки A до прямих BD, BC, CD відповідно. Довести, що $\dfrac{BD}{x} = \dfrac{BC}{y} + \dfrac{CD}{z}$.

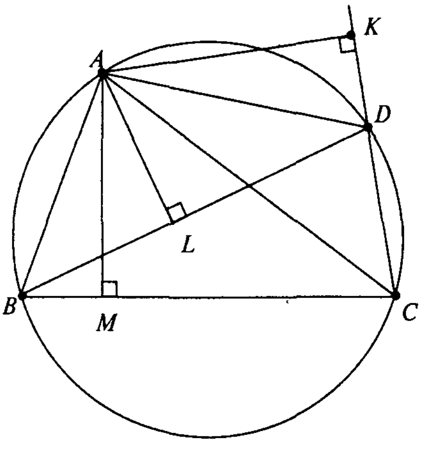


Рис. 4

Розв'язання

Нехай K, L, M — основи перпендикулярів, які проведені з точки A до прямих CD, BD і BC відповідно.

Маємо: $AL = x$, $AM = y$, $AK = z$. Нехай:

$$\alpha = \angle ADB = \angle ACB,$$

$$\beta = \angle ABC = \angle ADK,$$

$$\gamma = \angle ABD = \angle ACD.$$

Маємо:

$$\frac{BC}{y} + \frac{CD}{z} = \frac{BM + MC}{y} + \frac{CK - DK}{z} =$$

$$= \frac{BM}{y} + \frac{MC}{y} + \frac{CK}{z} - \frac{DK}{z} =$$

$$= \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{DL}{x} + \frac{BL}{x} = \frac{BD}{x}.$$

Примітка. Для випадку, коли $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ проведіть доведення самостійно.

Задача 5

Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, P, Q — середини сторін BC і AD відповідно. Нехай AP і BQ перетинаються в точці X; DP і CQ перетинаються в точці Y. Довести, що площа чотирикутника $PXQY$ дорівнює сумі площ трикутників ABX і DCY.

Розв'язання

Сполучимо точки P і Q і проведемо одну із діагоналей чотирикутника $ABCD$, наприклад, BD (див. *рис. 5*). Скори-

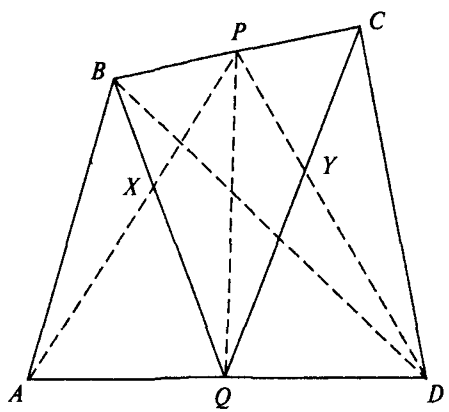


Рис. 5

стаємось тим фактом, що медіана трикутника розбиває його на два рівновеликих трикутники.

З трикутників *BAD* (з медіаною *BQ*) і *BCD* (з медіаною *DP*) отримуємо:

$$S_{ABQ} = S_{DBQ} \text{ і } S_{DPC} = S_{DPB}.$$

Також маємо:

$$S_{ABQ} + S_{DPC} = S_{DBQ} + S_{DPB} = S_{DPBQ} = S_{DPQ} + S_{BPQ} = S_{APQ} + S_{CPQ}$$

(оскільки *PQ* — медіана для трикутників *APD* і *CQB*). А тоді матимемо:

$$S_{AXQ} + S_{AXB} + S_{DYC} + S_{PYC} = S_{AXQ} + S_{PXQ} + S_{CPY} + S_{QPY}.$$

Після перетворень отримаємо: $S_{ABX} + S_{DCY} = S_{PXQY}$.

Задача 6

Нехай *P* — внутрішня точка трикутника *ABC* і відрізки *AP*, *BP*, *CP* перетинають сторони трикутника *BC*, *CA*, *AB* в точках *D*, *E* і *F* відповідно. Довести, що

$$\frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{AP}{PD}.$$

Розв'язання

Згідно з теоремою Чеви, для чевіан *AD*, *BE* і *CF*, які перетинаються в точці *P*, маємо:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \ (рис.\ 6).$$

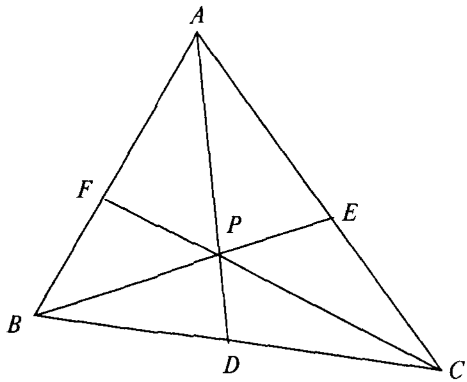


Рис. 6

Тоді:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC}.$$

З цього випливає, що

$$\frac{AF}{FB} + \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{FB}\left(1 + \frac{BD}{DC}\right) = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{DC}. \qquad (1)$$

Далі, використовуючи теорему Менелая для трикутника *ABD*, сторони якого перетинаються прямою *FPC*, маємо:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BC}{DC}\cdot\frac{DP}{PA}=1 \text{ або } \frac{AF}{FB}\cdot\frac{BC}{DC}=\frac{AP}{PD}. \quad (2)$$

З (1) і (2) випливає рівність, яку необхідно було довести.

Задача 7

Два кола з радіусами a і b дотикаються один одного зовнішньо. Нехай c — радіус кола, яке дотикається цих кіл і їх спільної дотичної так, як на рисунку. Довести, що

$$\frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}.$$

Розв'язання

Нехай A і B — центри кіл з радіусами a і b відповідно, які дотикаються зовнішнім чином у точці L. Очевидно, для того, щоб задача мала зміст, ми повинні взяти спільну дотичну цих кіл (PQ), яка не проходить через точку L. Нехай точка C — центр кола з радіусом c, яке дотикається цих двох кіл у точках M та N і їх спільної дотичної PQ у точці R (*рис. 7*).

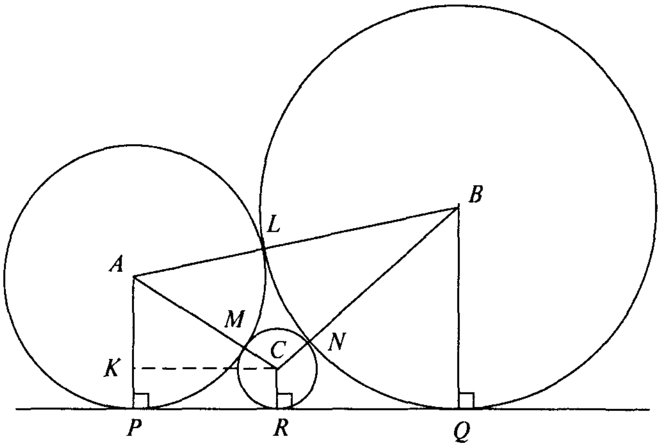


Рис. 7

Перш за все розглянемо кола з центрами в точках A і C та виразимо PR через радіуси цих кіл a і c. Зазначимо, що PR є проекцією відрізка AC на спільну дотичну PQ.

Якщо ми проведемо відрізок CK паралельно до RP ($K \in AP$), то отримаємо прямокутник $CKPR$ і

$$PR^2=CK^2=AC^2-AK^2=(AM+MC)^2-(AP-KP)^2=$$

$$= (a+c)^2 - (AP - CR)^2 = (a+c)^2 - (a-c)^2 = 4ac.$$

Отже, $PR = 2\sqrt{ac}$.

Але тоді ми можемо застосувати аналогічні міркування для інших пар кіл: для кіл з центрами в точках B і C та для кіл з центрами в точках A і B. Отримаємо: $RQ = 2\sqrt{bc}$ і $PQ = 2\sqrt{ab}$.

Проте $PQ = PR + RQ$. Таким чином, $2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$.

Поділивши обидві частини рівності на $2\sqrt{abc}$, дістанемо: $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$, що й потрібно було довести.

Задача 8

Побудувати трикутник ABC за висотами h_a, h_b, проведеними з вершин A і B відповідно, і медіаною m_a, проведеною з вершини A.

Розв'язання

Аналіз. Нехай трикутник ABC побудовано з висотами AK і BL та медіаною AM (*рис. 8*). Проведемо MT паралельно BL до перетину з AC в точці T. Тоді MT — середня лінія трикутника BLC, а отже, $MT = \frac{1}{2}BL = \frac{1}{2}h_b$. Це дає можливість побудувати трикутники AKM та AMT, а отже, і трикутник ABC.

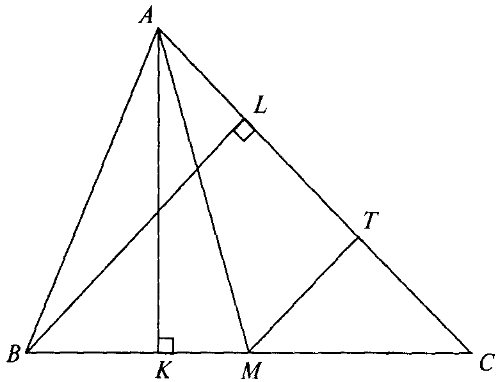


Рис. 8

Побудова. Будуємо трикутник AKM, маючи дві сторони $AK = h_a$, $AM = m_a$ та $\angle AKN = 90°$. На стороні AM як на діаметрі побудуємо коло, побудуємо також ще одне коло з центром у точці M радіуса $\frac{1}{2}h_b$. Одна з точок перетину — точка T. Проведемо AT до перетину з KM у точці C. На прямій MK визначимо точку B таку, що $BM = MC$. Сполучимо точки A і B. Трикутник ABC — шуканий (доведіть самостійно).

Задача 9

Дано кут QAP і точку L зовні цього кута. Побудувати пряму, яка проходить через точку L, перетинає AP у точці B, AQ в точці C таким чином, щоб трикутник ABC мав даний периметр.

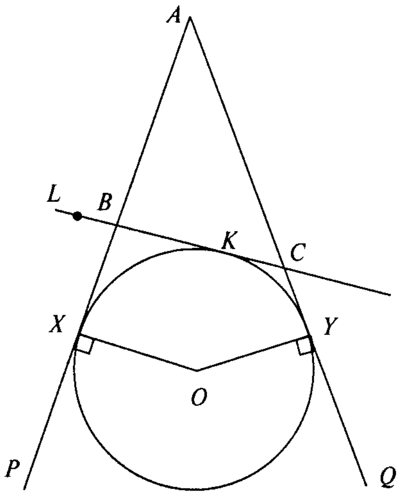


Рис. 9

Розв'язання

Аналіз. Припустимо, трикутник ABC з даним периметром, наприклад $2p$, побудовано. Розглянемо зовнівписане коло трикутника ABC, яке дотикається сторони BC в деякій точці K, і продовження сторін AB і AC у точках X та Y відповідно (*рис. 9*). Тоді $AX = AY = p$, і це коло ми можемо побудувати. Тоді ми можемо побудувати й сам трикутник ABC.

Побудова. Відкладаємо на сторонах даного в умові кута відрізки довжиною p: AX і AY. Будуємо перпендикуляри до сторін кута, що проходять через точки X та Y і перетинаються в точці O. Будуємо коло з центром у точці O радіуса OX. Проводимо дотичну до цього кола, яка проходить через точку L і перетинає сторони кута AP і AQ в точках B і C відповідно. (Таких дотичних можна побудувати дві, проте ми обираємо ту з них, яка залишає коло зовні трикутника ABC). Трикутник ABC є шуканим (доведіть самостійно).

Задача 10

Нехай точка I — центр вписаного кола трикутника ABC, яке дотикається сторін BC і AC у точках D і E відповідно. BI перетинає DE в точці G. Довести, що AG перпендикулярно до BG.

Розв'язання

Проведемо ID та AI. Покажемо, що трикутники BDG та BIA подібні (*рис. 10*). Маємо:

$$\angle DBG = \angle IBA,$$

оскільки BI — бісектриса кута ABC. Трикутник CDE рівнобедрений, оскільки $CD = CE$ як дотичні, які проведені до кола з однієї точки. Тоді

$$\angle CDE = \angle DEC = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB.$$

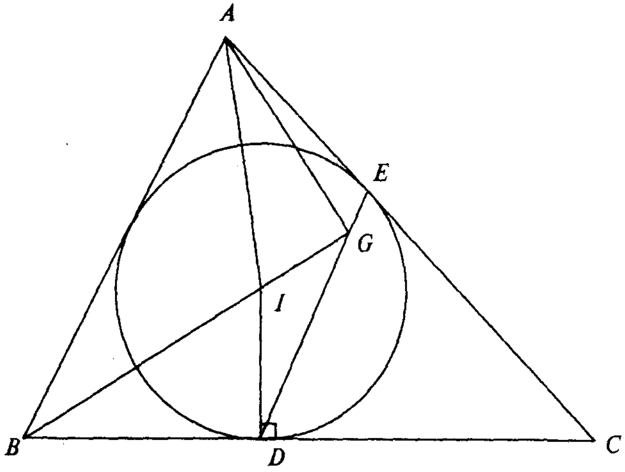


Рис. 10

З цього випливає:

$$\angle BDG = 180° - \angle CDE = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB.$$

Проте і кут BIA теж дорівнює $90° + \frac{1}{2}\angle ACB$, оскільки

$$\angle BIA = 180° - \angle ABI - \angle BAI = 180° - \frac{1}{2}\angle ABC - \frac{1}{2}\angle BAC = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB.$$

Таким чином, трикутники BDG та BIA подібні за двома кутами. А це означає, що $\frac{BD}{BI} = \frac{BG}{BA}$ або, що те ж саме, $\frac{BD}{BG} = \frac{BI}{BA}$. З цієї рівності, а також з того, що $\angle DBI = \angle GBA$, випливає, що трикутники BDI та BGA подібні. Але $\angle BDI = 90°$, тоді і $\angle BGA = 90°$. Отже, прямі AG і BG — перпендикулярні.

Задача 11

Нехай A — одна з двох точок перетину двох кіл з центрами в точках X та Y. Дотичні, що проходять через точку A до кожного з цих кіл, перетинають кола в точках B і C. Нехай точка P така, що чотирикутник $PXAY$ — паралелограм. Довести, що точка P — центр кола, описаного навколо трикутника ABC.

Розв'язання

Оскільки чотирикутник $PXAY$ — паралелограм, то PX паралельно AY (*рис. 11*). Оскільки AY — перпендикуляр до дотичної AB, то і PX перпендикулярно до AB. А оскільки AB — хорда кола з центром у точці X, то PX є серединним перпендикуляром цієї хорди.

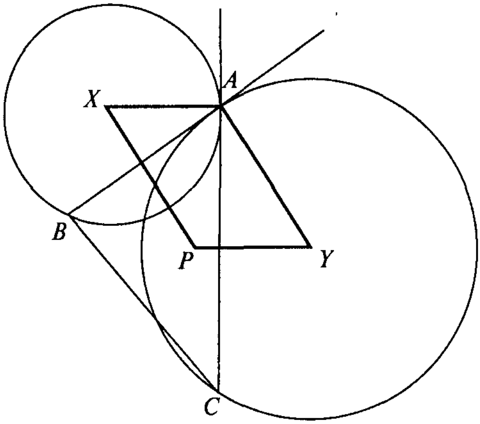


Рис. 11

Аналогічно доводиться, що PY — серединний перпендикуляр відрізка AC. Отже, серединні перпендикуляри двох сторін AB і AC трикутника ABC перетинаються в точці P, звідки і випливає, що точка P — центр кола, описаного навколо трикутника ABC.

Задача 12

Нехай I — центр кола, вписаного в трикутник ABC. Точки X та Y належать сторонам AB і AC відповідно так, що $BX \cdot AB = IB^2$ та $CY \cdot AC = IC^2$. Відомо, що точки X, I та Y лежать на одній прямій. Яких значень може набувати кут A?

Розв'язання

Із подібності трикутників BIX та BAI ($\angle IBX$ — спільний і $\dfrac{BI}{BX} = \dfrac{BA}{BI}$) та подібності трикутників CIY, CAI маємо:

$$\angle BIX = \angle BAI = \frac{\angle A}{2},$$

$$\angle CIY = \angle CAI = \frac{\angle A}{2} \text{ (рис. 12).}$$

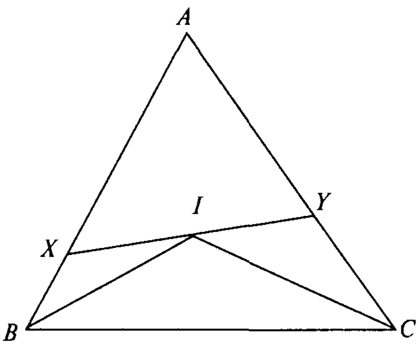


Рис. 12

Відомо також, що $\angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2}$. Але оскільки точки X, I та Y лежать на одній прямій, то

$$\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle A}{2} + \left(90° + \frac{\angle A}{2}\right) = 180°,$$

звідки знаходимо, що $\angle A = 60°$.

Відповідь. 60°.

Задача 13

Нехай I — центр кола, вписаного в трикутник ABC і T — точка дотику цього кола зі стороною BC. Пряма, що проходить через точку T паралельно до IA, перетинає коло в точці S, а дотична, проведена до цього кола через точку S, перетинає сторони AB і AC в точках C' і B' відповідно. Довести, що трикутники $AB'C'$ і ABC — подібні.

Розв'язання

Нехай AI перетинає BC у точці K. Проведемо IS (*рис. 13*). Оскільки відрізок AK паралельний ST, то

$$\angle STB = \angle AKB = \angle KCA + \angle KAC = \angle C + \frac{\angle A}{2}.$$

Отже, $\angle STI = 90° - \angle STB = 90° - \left(\angle C + \frac{\angle A}{2}\right)$.

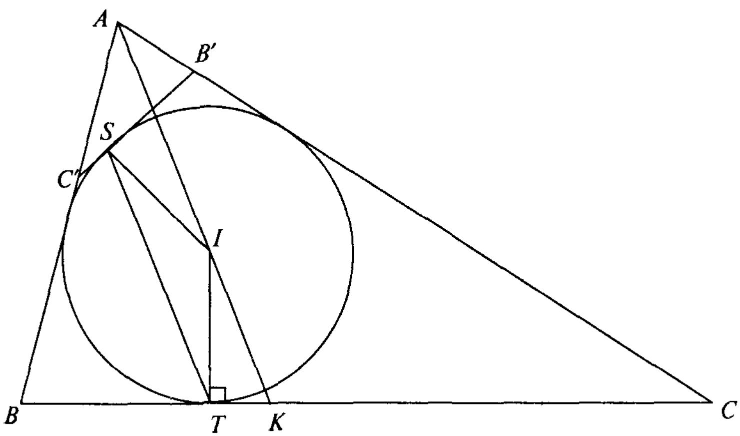


Рис. 13

Проте $\angle TSI = \angle STI$, оскільки трикутник SIT рівнобедрений. З цього випливає, що $\angle C'ST = 90° - \angle TSI = \angle C + \frac{\angle A}{2}$. Із чотирикутника $BTSC'$ знаходимо:

$$\angle SC'B = 360° - (\angle C'BT + \angle BTS + \angle TSC') =$$

$$= 360° - \left(\angle B + \angle C + \frac{\angle A}{2} + \angle C + \frac{\angle A}{2}\right) =$$

$$= 360° - (\angle A + \angle B + \angle C + \angle C) = 180° - \angle C.$$

Отже, $\angle AC'B' = 180° - \angle SC'B = 180° - (180° - \angle C) = \angle C.$

Аналогічно знаходимо, що $\angle AB'C' = \angle B$. А це означає, що трикутники ABC і $AB'C'$ подібні за двома рівними кутами.

Задача 14

Нехай $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ — правильний n-кутник, причому

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}.$$

Знайти n.

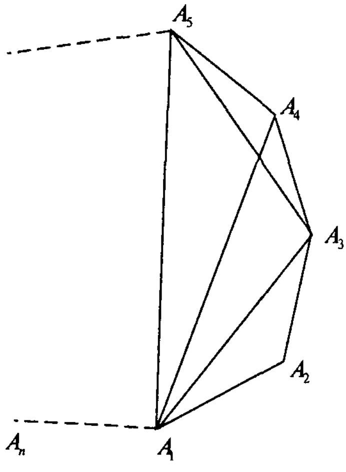


Рис. 14

Розв'язання

Із даної в умові рівності отримуємо:

$$A_1A_2 \cdot A_1A_3 + A_1A_2 \cdot A_1A_4 = A_1A_3 \cdot A_1A_4.$$

В опуклому чотирикутнику $A_1A_3A_4A_5$, за теоремою Птолемея:

$$A_4A_5 \cdot A_1A_3 + A_3A_4 \cdot A_1A_5 = A_3A_5 \cdot A_1A_4.$$

Оскільки $A_1A_2 \ldots A_n$ — правильний многокутник, то $A_1A_2 = A_4A_5$, $A_1A_2 = A_3A_4$, $A_1A_3 = A_3A_5$. З отриманих вище рівностей знаходимо:

$$A_1A_4 = A_1A_5.$$

Оскільки дві діагоналі A_1A_4 і A_1A_5 рівні, то з цього випливає, що кількість вершин між A_1 і A_4 дорівнює кількості вершин між A_1 і A_5. Це можливо лише для 7-кутника, тобто $n \doteq 7$.

Відповідь. 7.

Задача 15

Нехай $ABCD$ — чотирикутник, причому такий, що півколо з центром на середині сторони AB і діаметром, що лежить на стороні AB, дотикається трьох сторін BC, CD і DA. Довести, що $AB^2 = 4BC \cdot AD$.

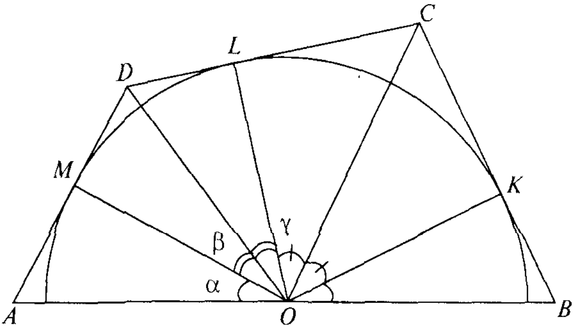


Рис. 15

Розв'язання

Нехай K, L, M — це точки дотику півкола зі сторонами BC, CD, DA відповідно (*рис. 15*). Проведемо OK, OL, OM, OC та OD (точка O — центр цього півкола і за умовою є серединою відрізка AB). Прямокутні трикутники AOM і BOK рівні за гіпотенузою ($AO = BO$ — за умовою) і катетом ($OM = OK$, як радіуси одного кола). Аналогічно доводимо, що $\Delta OMD = \Delta OLD$, $\Delta OLC = \Delta OKC$. Таким чином:

$$\angle AOM = \angle BOK = \alpha,\ \angle DOM = \angle DOL = \beta \text{ і } \angle COL = \angle COK = \gamma.$$

Додавши всі ці кути, отримаємо: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$ і тоді $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

З трикутників AOD і BCO знаходимо:

$$\angle OAD = 90° - \angle AOM = 90° - \alpha;$$

$$\angle CBO = 90° - \angle KOB = 90° - \alpha.$$

Аналогічно:

$$\angle AOD = \alpha + \beta = 90° - \gamma;$$

$$\angle BCO = 90° - \angle COK = 90° - \gamma.$$

Таким чином, трикутники AOD і BCO є подібними. З цього випливає, що $\frac{AO}{AD} = \frac{BC}{BO}$.

Отже, $AD \cdot BC = AO \cdot OB = \frac{1}{4} AB^2$.

Нарешті, маємо: $AB^2 = 4AD \cdot BC$.

Задача 16

ABC — гострокутний трикутник. Для будь-якої точки P, що лежить всередині цього трикутника, позначимо основи перпендикулярів, що проведені на сторони BC, CA і AB через D, E і F відповідно. Знайти геометричне місце всіх точок P, таких, що трикутник DEF — рівнобедрений. Для яких точок P трикутник DEF рівносторонній?

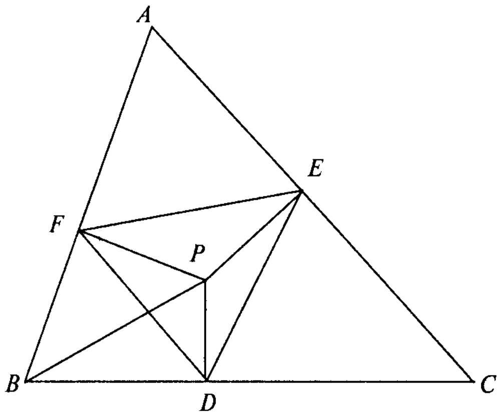


Рис. 16

Розв'язання

Припустимо, що $DE = DF$. Зазначимо, що BP є діаметром описаного кола (*рис. 16*). За теоремою синусів, для трикутника DBF знаходимо:

$$\frac{DF}{\sin \angle FBD} = 2R,$$

де R — радіус кола, описаного навколо трикутника DBF. Таким чином:

$$\frac{DF}{\sin \angle B} = BP \text{ або } DF = BP \sin \angle B.$$

Аналогічно отримуємо: $DE = CP \sin \angle C$.

Оскільки $DE = DF$, то $\frac{BP}{PC} = \frac{\sin \angle C}{\sin \angle B} = \frac{c}{b}$ (константа). Таким чином, ми одержали, що якщо $DE = DF$, то відношення $BP : PC$ є сталою величиною $c : b$. Проте відомо, що всі такі точки P містяться на колі (коло Аполонія). Отже, геометричним місцем точок P (щоб трикутник DEF був рівнобедреним) є об'єднання трьох дуг кіл, що лежать всередині трикутника. Ці три кола повинні мати спільну точку (оскільки з того, що $DE = DF$ і $FE = FD$ випливає: $EF = ED$), і це єдина точка P, коли трикутник DEF рівносторонній.

Задача 17

Три рівних кола мають спільну точку O і лежать всередині трикутника таким чином, що кожне коло дотикається рівно двох сторін трикутника. Довести, що центр вписаного кола, центр описаного кола і точка O лежать на одній прямій.

Розв'язання

Нехай точки K, L, M є центрами трьох кіл з однаковими радіусами, що перетинаються в спільній точці O, кожне з яких дотикається двох сторін трикутника ABC, у середині якого вони і лежать (*рис. 17*). Оскільки ці три кола мають однаковий радіус, то точка O рівновіддалена від точок K, L, M, а отже, є центром кола, описаного навколо трикутника KLM. Також слід зазначити, що сторони трикутника KLM паралельні сторонам трикутника ABC (наприклад, KL паралельно AB, оскільки точки K та L рівновіддалені від сторони AB).

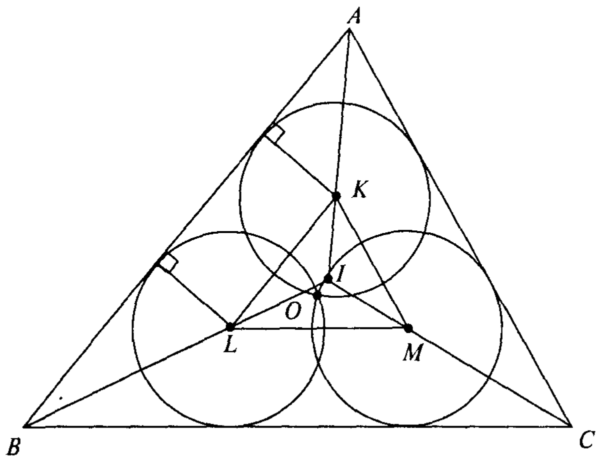


Рис. 17

AK, BL і CM є бісектрисами кутів A, B, C трикутника ABC. Вони перетинаються в точці I — центрі вписаного в трикутник ABC кола, проте тоді KI, LI, MI є також бісектрисами кутів трикутника KLM, з чого випливає, що точка I є центром кола, вписаного в трикутник KLM.

Із співвідношення

$$\frac{IK}{IA} = \frac{IL}{IB} = \frac{IM}{IC}$$

випливає, що трикутник KLM гомотетичний трикутнику ABC, причому точка I — центром гомотетії.

Зі властивостей перетворення гомотетії випливає, що центр гомотетії і дві відповідні точки лежать на одній прямій У нашому випадку точка I і центри кіл, описаних навколо трикутників KLM і ABC, повинні лежати на одній прямій Цей факт і треба було довести

Задача 18

Діагоналі AC і BD випуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються під прямим кутом у точці E Довести, що

$$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2,$$

де R — радіус описаного навколо цього чотирикутника кола

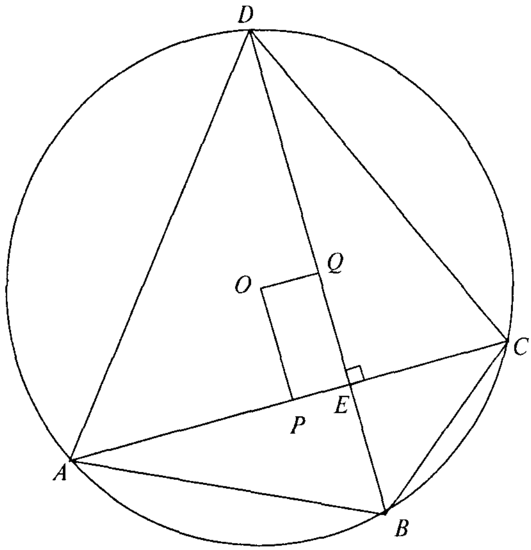


Рис. 18

Розв'язання

Нехай точка O є центром кола, точки P і Q — основи перпендикулярів, опущених з точки O на діагоналі AC і BD (*рис 18*) Очевидно, $OPEQ$ — прямокутник

Маємо

$$EA^2 + EC^2 = (EP+PA)^2 + (PC-PE)^2 = EP^2 + PA^2 + 2EP\ PA + PC^2 + PE^2 - 2PC\ PE = 2(PA^2 + PE^2),$$

оскільки $PA = PC$ Аналогічно отримуємо

$$EB^2 + ED^2 = 2(QD^2 + QE^2)$$

З цього випливає, що

$$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 2(PA^2 + PE^2) + 2(QD^2 + QE^2) =$$

$$= 2(PA^2 + OQ^2) + 2(QD^2 + OP^2) = 2(PA^2 + OP^2) + 2(QD^2 + OQ^2) =$$

$$= 2(OA^2 + OD^2) = 4R^2$$

Задача 19

Дано прямокутник $ABCD$ і точки P, Q, R, S — точки на сторонах AB, BC, CD, DA відповідно. Довести, що

$$PQ+QR+RS+SP \geq \sqrt{2}AC.$$

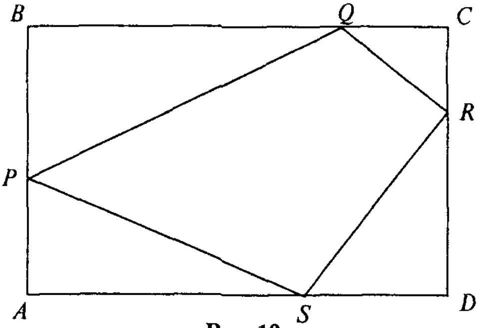


Рис. 19

Розв'язання

Маємо: $PQ \cdot QR > BQ \cdot QC$, $QR \cdot RS > CR \cdot RD$ і т. д. Тоді

$$(PQ+QR+RS+SP)^2 =$$

$$= PQ^2 + \ldots + 2PQ \cdot QR + \ldots >$$

$$> (PB^2 + BQ^2) + \ldots + 2BQ \cdot BC + \ldots = (PA+PB)^2 + (BQ+QC)^2 +$$

$$+(CR+RD)^2 + (DS+SA)^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 = 2AC^2.$$

З цього і випливає, що $PQ+QR+RS+SR \geq \sqrt{2}AC.$

Задача 20

P — внутрішня точка правильного трикутника ABC, така, що $AP^2 = BP^2 + CP^2$. Довести, що $\angle BPC = 150°$.

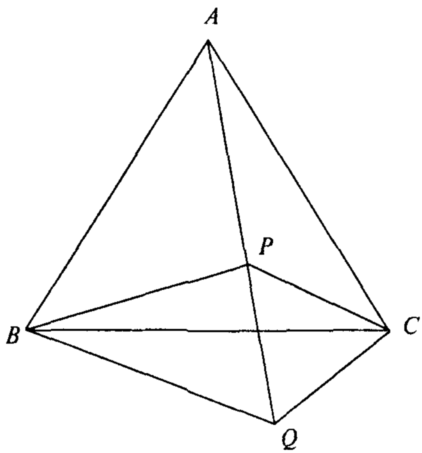


Рис. 20

Розв'язання

Проведемо CQ таким чином, що $\angle PCQ = 60°$ і $CP = CQ$. Тоді трикутник PCQ є рівностороннім, з чого випливає, що $PQ = PC$. З трикутників APC і BQC маємо:

$$AC = BC;\ PC = QC \text{ і } \angle ACP =$$

$$= 60° - \angle PCB = \angle BCQ,$$

тобто ці трикутники є рівними. Отже, $AP = BQ$.

Згідно з умовою,

$$AP^2 = BP^2 + CP^2 \text{ або } BQ^2 = BP^2 + PQ^2.$$

З останньої рівності випливає, що $\angle BPQ = 90°$. Тоді

$$\angle BPC = \angle BPQ + \angle QPC = 90° + 60° = 150°.$$

Задача 21

Дано трикутник ABC і висоту h_a, проведену з вершини A. Довести, що

$$(b+c)^2 \geq a^2 + 4h_a^2$$

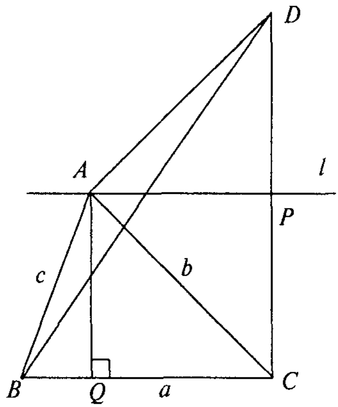


Рис. 21

(a, b і c — довжини сторін BC, AC і AB відповідно).

Розв'язання

I спосіб

Проведемо пряму l паралельно до BC через точку A і симетрично відобразимо сторону AC відносно цієї прямої (*рис. 21*). Отримаємо відрізок AD. Нехай пряма l і відрізок CD перетинаються в точці P. Проведемо BD.

Зазначимо, що $CP = PD = AQ = h_a$, де AQ — висота, проведена з вершини A. Маємо:

$$b + c = AC + AB = AD + AB \geq BD = \sqrt{CD^2 + CB^2} = \sqrt{4h_a^2 + a^2},$$

що й власне потрібно було довести. Зауважимо, що рівність досягається лише в тому випадку, коли точки B, A, D лежать на одній прямій, тобто тоді коли $AD = AB$ або, що те ж саме, коли $AC = BC$.

II спосіб

Нерівність, яку потрібно довести, еквівалентна наступній:

$$(b+c)^2 - a^2 \geq 4h_a^2 = \frac{16S^2}{a^2},$$

де S — площа трикутника ABC. Використовуючи формулу площі

$$16S^2 = \left((b+c)^2 - a^2\right)\left(a^2 - (b-c)^2\right)$$

(наслідок з формули Герона), зазначаємо, що нерівність виконується в тому випадку, коли $a^2 - (b-c)^2 \leq a^2$, що є істиною. Рівність, як бачимо, досягається тоді й тільки тоді, коли $b = c$.

Задача 22

Нехай P — внутрішня точка трикутника ABC і нехай прямі BP і CP перетинають сторони AC і AB у точках E та F відповідно. Відомо, що площі трикутників BPF, BPC і CPE дорівнюють 4, 8 і 13 відповідно. Обчислити площу чотирикутника $AFPE$.

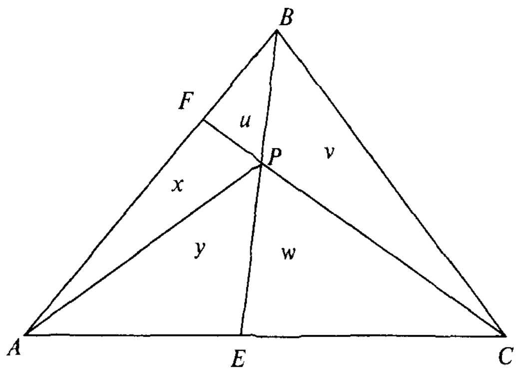


Рис. 22

Розв'язання

Розглянемо більш узагальнений випадок: нехай $S_{BPF}=u$, $S_{BPC}=v$ і $S_{CPE}=w$. Проведемо AP. Позначимо $S_{APF}=x$ і $S_{AEP}=y$ (*рис. 22*).

Використовуючи формули площ трикутників AFC і BFC, а також BFP і BPC, отримуємо:

$$\frac{x}{y+w}=\frac{FP}{PC}=\frac{u}{v}.$$

Це співвідношення дає рівність $vx-uy=uw$.

Аналогічно, використовуючи формули площ трикутників AEB і CEB, отримуємо інше співвідношення, а саме:

$$wx-vy=-uw.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо:

$$x=\frac{uw(u+v)}{v^2-uw},\ y=\frac{uw(w+v)}{v^2-uw}.$$

З цього випливає, що:

$$x+y=\frac{uw(u+2v+w)}{v^2-uw}.$$

Поклавши в останнє співвідношення $u=4$, $v=8$, $w=13$, знаходимо площу чотирикутника $AFPE$ — 143 кв. од.

Відповідь. 143 кв. од.

Задача 23

Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, вписаний у коло з одиничним радіусом. Довести, що якщо $AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \geq 4$, то $ABCD$ — квадрат.

Розв'язання

Нехай $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$. За умовою дано: $abcd \geq 4$. За теоремою Птолемея і використовуючи той факт, що кожна з діагоналей не може бути більшою за діаметр описаного кола, отримуємо:

$$ac + bd = AC \cdot BD \leq 4.$$

Проте, згідно зі співвідношенням між середнім арифметичним і середнім геометричним,

$$ac + bd \geq 2\sqrt{abcd} \geq 2\sqrt{4} = 4.$$

Отже, ми встановили, що $ac + bd = 4$. Тоді й $AC \cdot BD = 4$, звідки $AC = BD = 2$. З цього випливає, що AC і BD є діаметрами описаного кола, тобто $ABCD$ — прямокутник. Зазначимо, що

$$(ac - bd)^2 = (ac + bd)^2 - 4abcd \leq 16 - 16 = 0.$$

Звідки знаходимо: $ac = bd = 2$. Таким чином, отримуємо: $a = c = \sqrt{ac} = \sqrt{2}$ і аналогічно $b = d = \sqrt{2}$. З цього й випливає, що $ABCD$ — квадрат.

КОМБІНАТОРИКА

Задача 1

Розглянемо набір трьохелементних підмножин множини натуральних чисел від 1 до 300. Обчислити, скільки існує підмножин, у кожної з яких сума трьох її елементів ділиться на 3.

Розв'язання

Нехай A_j — множина усіх натуральних чисел від 1 до 300, що дають остачу j при діленні на 3. Тоді $N(A_j) = 100$, де $0 \le j \le 2$. Якщо a, b і c — три натуральних числа в межах від 1 до 300, то $a+b+c$ ділиться на 3 лише у двох випадках:

а) кожне з чисел a, b, c або з множини A_0, або з A_1, або з A_2;

б) одне з чисел a, b, c належить множині A_0, інше — A_1, останнє — A_2.

Число трьохелементних підмножин множини A_j, $0 \le j \le 2$ дорівнює C_{100}^3. Для кожного вибору числа a з A_0, b з A_1, c з A_2, ми отримаємо трьохелементну множину, для якої сума $a+b+c$ ділиться на 3. Таким чином, загальна кількість трьохелементних підмножин $\{a, b, c\}$, таких, що сума $a+b+c$ ділиться на 3, дорівнює:

$$3C_{100}^3 + 100^3 = 1485100.$$

Відповідь. 1 485 100.

Задача 2

Скільки існує трьохелементних підмножин множини натуральних чисел від 1 до 20, таких, добуток елементів кожної з яких ділиться на 4?

Розв'язання

Підрахуємо кількість трьохелементних підмножин $\{a, b, c\}$, для яких добуток abc не ділиться на 4. Це можливо в одному з двох випадків:

а) кожне з чисел a, b, c є непарним;

б) будь-які два з них непарні, а третє — парне, проте не ділиться на 4.

Таким чином, кількість трьохелементних підмножин $\{a,b,c\}$, для яких добуток abc не ділиться на 4, дорівнює $C_{10}^3+5C_{10}^2=345$. Із множини натуральних чисел від 1 до 20 можна утворити C_{20}^3 можливих трьохелементних підмножин, тобто 1140. У множині натуральних чисел від 1 до 20 маємо 10 непарних чисел та 5 парних чисел, що не діляться на 4. Отже, шукана кількість трьохелементних підмножин, добуток елементів кожної з яких ділиться на 4, дорівнює $1140-345=795$.

Відповідь. 795.

Задача 3

Нехай A_1, A_2, ..., A_6 — шість чотирьохелементних множин; B_1, B_2, ..., B_n — n двоелементних множин, таких, що:

$$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_6=B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n=S.$$

Знайти n, якщо відомо, що кожний елемент множини S належить рівно чотирьом множинам A_i і рівно трьом множинам B_j.

Розв'язання

Оскільки кожна множина A_i містить 4 елементи, то разом ми маємо 24 елементи, деякі з яких можуть повторюватись. Проте кожний елемент повторюється рівно 4 рази, оскільки за умовою кожний елемент належить точно чотирьом множинам A_i. Отже, кількість різних елементів множини S дорівнює: $24:4=6$.

Оскільки $S=B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n$ і множини B_i — двоелементні, то множина S містить $2n$ елементів. Проте кожний елемент з'являється рівно тричі. Отже, кількість різних елементів множини S дорівнює $\frac{2n}{3}$.

Тоді матимемо: $\frac{2n}{3}=6$, звідки $n=9$.

Відповідь. $n=9$.

Задача 4

Дві коробки містять разом 65 кульок різних розмірів. Кожна кулька білого, чорного, червоного або жовтого кольорів. Якщо взяти будь-яких п'ять кульок одного кольору, то щонайменше дві з них матимуть однаковий розмір. Довести, що в одній коробці існує принаймні три кульки, які мають однаковий колір і однаковий розмір.

Розв'язання

Оскільки дві коробки містять 65 кульок, то це означає, що принаймні в одні з цих коробок міститься щонайменше 33 кульки (в іншому випадку загальна кількість кульок буде меншою за 65). Розглянемо одну з цих коробок (наприклад, ту, в якій більше кульок). Маємо принаймні 33 кульки і 4 різних кольори, а тому щонайменше 9 кульок одного кольору. Також, згідно з умовою, серед цих дев'яти кульок максимум чотири різного розміру (у випадку, якщо кількість розмірів перевищуватиме 4, отримаємо набір з п'яти кульок одного кольору, проте різного розміру, що суперечить умові задачі). Отже, серед цих дев'яти кульок (одного кольору з однієї коробки) повинно бути принаймні 3 кульки однакового розміру.

Задача 5

Дано дві коробки, що містять довільне число кульок. На початку обидві коробки не порожні. Дозволяється виконувати наступні операції:

а) виймати однакове число кульок одночасно з обох коробок;

б) подвоювати число кульок у будь-якій коробці.

Довести, що після виконання скінченого числа цих операцій обидві коробки можуть виявитись порожніми.

Розв'язання

Якщо в обох коробках ми маємо однакове число кульок, то можемо досягти мети, використавши лише одну операцію. В іншому випадку, ми виймемо з кожної коробки стільки кульок, щоб в одній з них залишилась лише одна кулька. Далі подвоюємо вміст коробки, яка містить одну кульку, і після цього з кожної коробки вилучаємо по одній кульці. Цей процес продовжуватимемо доти, поки в кожній коробці не залишиться по одній кульці. Цей шлях скінченний, оскільки після вказаних двох операцій кількість кульок з другої коробки зменшується на одиницю. Останньою операцією ми можемо зробити коробки порожніми, вийнявши з кожної по одній кульці.

Задача 6

Нехай A — підмножина множини $\{1, 11, 21, 31, \dots 541, 551\}$, що має таку властивість: сума двох довільних елементів з A менша за 552. Довести, що кількість елементів множини A не перевищує 28.

Розв'язання

Множину $\{1,11,21,31,..541,551\}$, яка має 56 елементів, розіб'ємо на пари таким чином: $\{\{1, 551\}, \{11, 541\}, \dots, \{271, 281\}\}$. Отримали 28 пар. Отже, якщо множина A має більш ніж 28 елементів, то існує деяка пара, обидва елементи якої належать множині A. Але це неможливо, оскільки тоді існують два числа з множини A, сума яких дорівнює 552. Таким чином, множина A не може мати більше 28 елементів.

Задача 7

Нехай $A=\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ і B — підмножина множини A, що містить 48 елементів. Довести, що в множині B існують два різних елементи x та y, сума яких ділиться на 11.

Розв'язання

Для кожного n $(0 \le n \le 10)$, позначимо через A_n множину чисел з множини A, які дають остачу n при діленні на 11. Тоді A_1 складається з 10 елементів, кожна множина A_i при $i > 1$ — з 9. Якщо $\{a, b\}$ — довільна двоелементна підмножина з A, то $a+b$ ділиться на 11 в одному з двох випадків

а) a і b належать A_0;

б) якщо $a \in A_k$ і $b \in A_{11-k}$ для деякого $k, 1 \le k \le 10$.

Розглянемо довільну множину B з 48 елементів. Якщо множина B містить два елементи з множини A_0, то шукані елементи існують. Аналогічно, якщо множина B містить елементи з множин A_k і A_{11-k}, $1 \le k \le 10$, то знову ж таки їх сума ділитиметься на 11. Тоді множина B може містити один елемент з A_0, 10 з A_1 і 9 з множин A_k, для деяких 4-х значень k $(k \ne 10)$, наприклад k_1, k_2, k_3, k_4, сума будь-яких двох з них не дорівнює 11. Але тоді кількість елементів множини B дорівнює 47. Тоді повинен існувати ще один елемент або з A_{10}, або з A_{11-k_j}, $1 \le j \le 4$. Отже, ми завжди можемо знайти два елементи $a \in A_k$ і $b \in A_{11-k}$. Сума цих елементів ділитиметься на 11.

Задача 8

Дано 17 різних натуральних чисел, у кожного з яких немає простого дільника, більшого за 10. Довести, що добуток деяких двох з них є квадратом натурального числа.

Розв'язання

Згідно з умовою, кожне з поданих 17 чисел може бути подано у вигляді $2^a 3^b 5^c 7^d$, де a, b, c, d — цілі невід'ємні числа. Добуток деяких двох таких чисел $2^a 3^b 5^c 7^d$ і $2^{a'} 3^{b'} 5^{c'} 7^{d'}$, є число $2^{a+a'} 3^{b+b'} 5^{c+c'} 7^{d+d'}$. Таким чином, якщо числа $a+a'$, $b+b'$, $c+c'$, $d+d'$ парні, то добуток чисел є повним квадратом. Це можливо в тому випадку, коли відповідні елементи четвірок чисел (a, b, c, d) і (a', b', c', d') мають однакову парність. Оскільки кожне з чисел a, b, c, d може бути або парним, або непарним, то загальне число випадків парності елементів четвірки (a, b, c, d) дорівнює $2^4 = 16$. Оскільки ми маємо 17 четвірок (a, b, c, d), які відповідають даним в умові 17 числам, то, за принципом Діріхле, існують принаймні дві четвірки, відповідні елементи якої мають однакову парність. Добуток чисел, які відповідають цим четвіркам, є квадратом натурального числа.

Задача 9

Нехай A — підмножина множини $\{1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n\}$, яка містить $n+1$ елементів. Довести, що:

а) деякі два числа з множини A взаємно прості.

б) існують два числа з множини A таких, що одне з них ділиться на інше.

Розв'язання

а) Оскільки множина A містить $n+1$ чисел з множини $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$, то в ній існує два послідовних числа. Дійсно, якщо розбити множину $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ на пари чисел $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots \{2n-1, 2n\}\}$, то в силу того, що таких пар рівно n, існує принаймні одна пара, обидва елементи якої належать множині A. Проте будь-які два послідовних натуральних числа є взаємно простими.

б) Подамо кожне число з множини A у вигляді $2^p \cdot q$, де p — ціле невід'ємне число, q — непарне. Зазначимо, що q може набувати одне із n наступних чисел $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1$. Оскільки множина A містить $n+1$ число, то існують принаймні два числа $a = 2^{p_1} \cdot q_1$ і $b = 2^{p_2} \cdot q_2$, що $q_1 = q_2$. Оскільки $a \neq b$, то p_1 або більше p_2, або менше p_2. В обох випадках або a ділиться на b, або b ділиться на a.

Задача 10

Дано сім довільних різних дійсних чисел. Довести, що серед них існує два числа x і y, таких, що $0<\frac{x-y}{1+xy}<\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання

Будь-яке дійсне число x можна подати у вигляді $\operatorname{tg}\alpha$, де α — деякий кут від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Нехай $x_i=\operatorname{tg}\alpha_i$, $1\le i\le 7$, де x_i, $1\le i\le 7$ — дані в умові дійсні числа. Припустимо, що α_i впорядковані таким чином, що $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_7$. Тоді $\alpha_7-\alpha_1<180^\circ$ і відповідно $\alpha_{i+1}-\alpha_i<30^\circ$ для деякого значення i. Це означає, що:

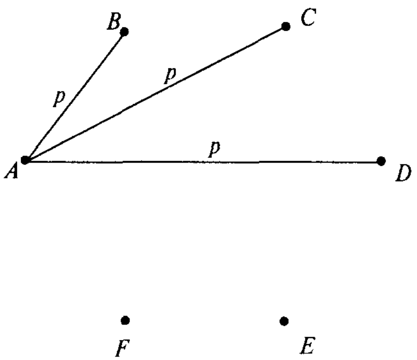
$$0<\operatorname{tg}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)<\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Проте $\operatorname{tg}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_{i+1}-\operatorname{tg}\alpha_i}{1+\operatorname{tg}\alpha_{i+1}\operatorname{tg}\alpha_i}=\frac{x_{i+1}-x_i}{1+x_{i+1}x_i}$.

Звідси отримуємо: $0<\frac{x_{i+1}-x_i}{1+x_{i+1}x_i}<\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 11

На острові розташовано шість міст, причому будь-які два з них з'єднані або залізницею, або автошляхом, проте не обома шляхами одночасно. Довести, що існує три міста, які з'єднані між собою одним видом транспорту.



Розв'язання

Нехай A, B, C, D, E, F — шість міст, кожні два з яких з'єднані або залізницею, або автошляхом (*рис.*). Позначимо залізницю через p, автодорогу через r. Розглянемо дороги, які виходять з одного конкретного міста, наприклад з A. Маємо п'ять шляхів: AB, AC, AD, AE і AF. Оскільки маємо лише два види транспорту і п'ять шляхів, то, за принципом Діріхле, принаймні є три шляхи одного типу Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що це залізничні шляхи AB, AC та AD

Задача 12

Скільки зростаючих трьохелементних геометричних прогресій можна побудувати з послідовності $1, 2, 2^2, 2^3,\ \ , 2^n$? (Наприклад, $\{2^2, 3^5, 2^8\}$ — трьохелементна геометрична прогресія для $n \geq 8$)

Розв'язання

Обчислимо кількість трьохелементних геометричних прогресій, в яких знаменник дорівнює 2, 2^2, 2^3,

Трьохелементні геометричні прогресії зі знаменником 2

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\quad ,\ 2^{n-2},\ 2^{n-1},\ 2^n$$

Таких прогресій — $n-1$ Трьохелементні геометричні прогресії з знаменником 2^2

$$1,\ 2^2,\ 2^4,\ 2,\ 2^3,\ 2^5,\quad ,\ 2^{n-4},\ 2^{n-2},\ 2^n$$

Цих прогресій — $n-3$ Аналогічно можна помітити, що трьохелементних геометричних прогресій зі знаменником 2^3 — $n-5$ і т д Таким чином, шукана загальна кількість

$$S = (n-1) + (n-3) + (n-5) +$$

Останній член цієї суми дорівнює або 1, або 2, залежно від парності числа n Якщо n — непарне, то

$$S = (n-1) + (n-3) + (n-5) + \quad + 2 = 2\left(1 + 2 + 3 + \quad + \frac{n-1}{2}\right) = \frac{n^2-1}{4}$$

Якщо n — парне, то $S = (n-1) + (n-3) + (n-5) + \quad + 1 = \dfrac{n^2}{4}$

Таким чином, шукана кількість дорівнює $\dfrac{n^2-1}{4}$, якщо n — непарне або $\dfrac{n^2}{4}$ при парному n

Відповідь $\dfrac{n^2-1}{4}$, якщо n — непарне, $\dfrac{n^2}{4}$ при парному n

Задача 13

Нехай A — множина всіх натуральних чисел до 700, які діляться на 3, а B — множина всіх натуральних чисел до 300, які діляться на 7. Скільки існує впорядкованих пар (a, b), таких, що $a \in A$, $b \in B$, $a \neq b$ і число $a + b$ — парне?

Розв'язання

Зазначимо, що множина A містить 233 елементи, з яких 116 — парних і 117 — непарних, а множина B містить 42 елементи, з яких 21 — парних і 21 — непарних і $A \cap B$ містить 14 елементів. Таким чином, шукане число впорядкованих пар:

$$n = |\{(a, b) | a \in A, b \in B, a + b - \text{парне}\}| - |\{(a, b) | a \in A, b \in B, a = b\}| =$$

$$= |\{(a, b) | a \in A, b \in B, a - \text{парне } b - \text{парне}\}| +$$

$$+ |\{(a, b) | a \in A, b \in B, a - \text{непарне}, b - \text{непарне}\}| -$$

$$- |\{(a, b) | a \in A, b \in B, a = b\}| = 116 \cdot 21 + 117 \cdot 21 - 14 = 4879.$$

Відповідь. 4879.

Задача 14

Нехай $A \subset \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, $|A| = 50$, причому в множині A не існує двох чисел, сума яких дорівнює 100. Довести, що множина A містить число, яке є квадратом деякого натурального числа.

Розв'язання

Якщо $100 \in A$, то, оскільки воно є квадратом, умова виконується. Тому нехай $A \subset \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$. Розглянемо двоелементні підмножини $\{1, 99\}$, $\{2, 98\}$, $\{3, 97\}$, ..., $\{49, 51\}$ і одноелементну множину $\{50\}$. Ці п'ятдесят множин розбивають множину $\{1, 2, \ldots, 99\}$ на підмножини, які попарно не перетинаються, причому сума елементів у кожній двохелементній підмножині дорівнює 100. З умови випливає, що множина A не може містити більше одного елемента з кожної підмножини, але всього таких підмножин 50, тобто множина A містить рівно по одному елементу з кожної підмножини. Проте $\{36, 64\}$ — одна з побудованих двохелементних підмножин, тобто множина A повинна містити або елемент 36, або елемент 64, тобто вона містить число, яке є повним квадратом.

Задача 15

Скільки існує невпорядкованих пар (A, B) (тобто підмножин n-елементної множини X), таких, що $A \neq B$ і $A \cup B = X$?

Розв'язання

Нехай множина A містить r елементів, $0 \leq r \leq n$. Тоді ця множина може бути обрана C_n^r способами. Для кожної такої множини A, множина B повинна мати решту $n - r$ елементів і, можливо, деякі елементи множини A. Таким чином, $B = (X \setminus A) \cup C$, де $C \subset A$. Тоді множина B може бути обрана 2^r способами. Отже, існує $\sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r \cdot 2^r = (1+2)^n = 3^n$ способів вибору множин A і B, які б задовольняли умови задачі. Лише в одному випадку множини A і B рівні (і дорівнюють X). Оскільки, згідно з умовою, пари невпорядковані, то отримуємо остаточну відповідь: усього $\frac{3^n - 1}{2}$ пар.

Відповідь. $\frac{3^n - 1}{2}$.

Задача 16

Знайти мінімально можливе найменше спільне кратне двадцяти натуральних чисел (не обов'язково різних), сума яких дорівнює 801.

Розв'язання

Зауважимо, що оскільки $\left[\frac{801}{20}\right] = 40$, то існує принаймні одне число, яке не менше за 41, а отже, і найменше спільне кратне цих чисел не менше за 41. Покажемо, що не існує набору з двадцяти чисел, сума яких дорівнює 801, а найменше спільне кратне яких дорівнює 41. Зрозуміло, що цей набір чисел не повинен містити чисел, більших за 41 (інакше найменше спільне кратне було б більше за 41), і не повинен містити чисел менших за 41 (за винятком 1), оскільки 41 — просте число. Проте не існує набору з двадцяти чисел 41 або 1, які б у сумі давали 801 (оскільки $41 \cdot 20 = 820 > 801$, а $41 \cdot 19 + 1 = 780 < 801$). Якщо ми візьмемо дев'ятнадцять чисел 42 і одне число 3, то матимемо 20 чисел, сума яких дорівнює 801, а найменше спільне кратне яких рівне 42. Таким чином, мінімальним найменшим спільним кратним є число 42.

Відповідь. 42.

Задача 17

Скільки існує многочленів другого степеня ax^2+bx+c, які задовольняють наступні умови:

а) числа a, b, c різні;

б) $a, b, c \in \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 1999\}$;

в) ax^2+bx+c ділиться на $x+1$?

Розв'язання

Оскільки ax^2+bx+c ділиться на $x+1$, то $a+c=b$. Таким чином, необхідно порахувати, скільки існує трійок чисел (a, b, c) таких, що a, b, c належать множині $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 1999\}$, $a \neq c$ і $a+c=b$. Якщо покласти $a<c$, то для кожного a, такого, що $1 \leq a \leq 999$, c може набувати значення в межах від $a+1$ до $1999-a$. Таким чином, для $a=1$ c може набувати значень у межах від 2 до 1998, даючи тим самим 1997 впорядкованих пар (a, c), таких, що $a<c$; для $a=2$ c може змінюватись у межах від 3 до 1997, даючи тим самим 1995 впорядкованих пар (a, c), $a<c$. Продовжуючи наші міркування, доходимо висновку, що число впорядкованих пар, таких, що $a<c$ і $a+c$ належить множині $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 1999\}$, дорівнює:

$$1997+1995+1993+\ldots+1=999^2.$$

Аналогічно пар (a, c), таких, що $c<a$ і $a+c$ належить множині $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 1999\}$, також 999^2. Отже, загальне число трійок (a, b, c) дорівнює $2 \cdot 999^2=1996002$.

Відповідь. 1 996 002.

Задача 18

Довести, що кількість трьохелементних підмножин $\{a, b, c\}$ множини $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 63\}$, таких, що $a+b+c<95$, менша, ніж кількість підмножин, таких, що $a+b+c>95$.

Розв'язання

Нехай (a,b,c) — підмножина множини $\{1, 2, 3, ..., 63\}$, причому $a+b+c<95$. Тоді $\{64-a, 64-b, 64-c\}$ — підмножина множини $\{1, 2, 3, ..., 63\}$, причому:

$$(64-a)+(64-b)+(64-c)=192-(a+b+c)>192-95=97.$$

Навпаки: якщо (a,b,c) — підмножина множини $\{1, 2, 3, ..., 63\}$, причому $a+b+c>97$, то $(64-a, 64-b, 64-c)$ — також підмножина цієї множини і:

$$(64-a)+(64-b)+(64-c)=192-(a+b+c)<95.$$

Таким чином, існує взаємно однозначна відповідність між трьохелементними підмножинами (a,b,c) множини $\{1, 2, 3, ..., 63\}$, в яких $a+b+c<95$ і $a+b+c>97$. Отже, кількість цих підмножин однакова. Але множина трьохелементних підмножин (a,b,c), таких, що $a+b+c>95$ містить у собі множину трьохелементних підмножин, таких, що $a+b+c>97$, а тому їх більше, ніж підмножин (a,b,c), де $a+b+c<95$.

Задача 19

Нехай X — n-елементна множина. Скільки існує впорядкованих трійок (A,B,C) підмножин множини X, таких, що A — підмножина B і B — строга підмножина множини C?

Розв'язання

I спосіб

Нехай підмножина B множини X містить r елементів. Тоді множину B можна вибрати C_n^r способами, множину A можна вибрати 2^r способами, а множину C — $2^{n-r}-1$ способами. Таким чином, загальне число трійок (A,B,C), таких, що $A\subset B\subset C$, але $B\neq C$, дорівнює:

$$\sum_{r=0}^{n} 2^r\cdot C_n^r\cdot(2^{n-r}-1)=4^n-3^n.$$

II спосіб

Позначимо через 0 або 1 відповідно відсутність або наявність даного елемента множини X у множинах A, B, C. Для кожного фіксованого елемента множини X існує чотири варіанти його входження в множини A,B,C, а саме: 000, 001, 011, 111. Таким чином, усього 4^n трійок множин. Але $B = C$ дає три варіанти входження елемента: 000, 011, 111, тобто всього 3^n трійок (A, B, B). Отже, число трійок (A, B, C), таких, що $A \subset B \subset C$, і $B \neq C$, — $4^n - 3^n$.

Відповідь. $4^n - 3^n$.

Задача 20

Скільки існує матриць 4×4, елементами якої є числа множини $\{0, 1, 2, 3\}$, таких, що суми чисел, що знаходяться в кожному рядку і в кожному стовпчику, ділиться на 4?

Розв'язання

Заповнимо верхню ліву частину 3×3 матриці 4×4 довільно обраними числами 0, 1, 2, 3. Це можна зробити 4^9 способами. Три числа першого рядка однозначно визначають a — четверте число першого рядка, оскільки воно може набувати одного із значень 0, 1, 2, 3, тобто всі можливі остачі при діленні на 4. Аналогічно числа b, c, p, q, r також визначаються однозначно. Також слід зазначити, що числа $a + b + c$ та $p + q + r$ дають однакову остачу при діленні на 4, оскільки $a + b + c$ дає таку ж саму остачу при діленні на 4, як сума чисел, які стоять в рядках таблиці 3×3, а $p + q + r$ при діленні на 4 дає таку ж саму остачу, як сума чисел, які стоять у стовпцях матриці 3×3. Проте ці суми рівні, оскільки додаються однакові числа. Таким чином, останнє невідоме число x матриці визначається однозначно. Отже, всього шуканих матриць рівно 4^9.

Відповідь. 4^9.

Задача 21

Дано матрицю розмірності $2n \times 2n$, що складається з нулів та одиниць, причому нулів рівно $3n$. Довести, що можна вилучити всі нулі, шляхом видалення з матриці деяких n рядків та деяких n стовпчиків.

Розв'язання

Видалимо n рядків матриці, що містять найбільше число нулів. Доведемо, що найбільша кількість нулів, що залишилась, дорівнює n. Припустимо, що після видалення n рядків залишилось принаймні $n + 1$ нулів, що розташовані в n рядках, що залишились. Тоді, за принципом Діріхле, існує принаймні один рядок, що містить 2 нулі. Це означає, що ми видаляли рядки, кожен з яких містить принаймні 2 нулі, тобто ми вилучили тим самим принаймні $2n$ нулів. Але тоді залишається не більше ніж $3n-2n=n$ нулів. Отримали протиріччя, яке й доводить той факт, що найбільша кількість нулів, що залишилась, дорівнює n.

Видаливши n стовпців, ми за довільного розташування решти n нулів, можемо тим самим їх вилучити.

Задача 22

Для яких натуральних значень n існує розбиття множини $\{1,2,3,\dots,4n\}$ на n чотирьохелементних підмножин $\{a,b,c,d\}$, які попарно не перетинаються, таких, що для кожної такої множини $a=\dfrac{b+c+d}{3}$?

Розв'язання

Нехай $\{a,b,c,d\}$ — підмножина даної множини, причому $a=\dfrac{b+c+d}{3}$. Тоді $a+b+c+d=4a$. З цього випливає, що якщо розбиття множини існує, то тоді $1+2+\dots+4n$ повинно ділитись на 4. Ця сума дорівнює $2n(4n+1)$. Таким чином, необхідною умовою можливості розбиття множини є парність числа n.

Доведемо, що парність n є також і достатньою умовою, тобто якщо $n=2k$, $k\in N$, то існує розбиття множини $\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 8k\}$ на підмножини $\{a,b,c,d\}$, які попарно не перетинаються, такі, що $a=\dfrac{b+c+d}{3}$. З цією метою поділимо множину $\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 8k\}$ на 8-елементні підмножини, що складаються з послідовних чисел. Якщо $\{a+1,\ a+2,\ \dots,\ a+8\}$ — одна з таких підмножин, то розіб'ємо її на такі чотирьохелементні підмножини:

$$\{a+4,a+1,a+3,a+8\},\{a+5,a+2,a+6,a+7\}.$$

Таке розбиття задовольняє умови задачі, оскільки:

$$a+4=\frac{a+1+a+3+a+8}{3}\ \text{ і }\ a+5=\frac{a+2+a+6+a+7}{3}.$$

Задача 23

Для довільного натурального n ($n\ge 3$), позначимо через $f(n)$ число різних трикутників, сторони яких є натуральними числами і периметр дорівнює n (наприклад, $f(3)=1$, $f(4)=0$, $f(7)=2$). Довести, що:

а) $f(1999) > f(1996)$;

б) $f(2000) = f(1997)$.

Розв'язання

а) Нехай a, b, c — довжини сторін трикутника з периметром $a+b+c=1996$, причому a, b, c — натуральні числа. Тоді $a+1$, $b+1$, $c+1$ — сторони трикутника з периметром 1999, оскільки $a<b+c$, і тому $a+1<(b+1)+(c+1)$ і т. д. Але трійка $(999, 999, 1)$ визначає трикутник з периметром 1999, який не подається у формі $(a+1, b+1, c+1)$. Таким чином, $f(1999) > f(1996)$.

б) Аналогічно, як у випадку а), ми встановлюємо, що $f(2000) \geq f(1997)$. З іншого боку, якщо x, y, z — довжини сторін трикутника з периметром $x+y+z=2000$ і $x, y, z \in N$, то $z \neq 1$, бо в противному разі дістанемо $x+y=1999$, а розв'язання цього рівняння в натуральних числах приводить до нерівності $x-y \geq 1 = z$, що суперечить нерівності трикутника. Отже, $x \geq y \geq z > 1$ або $x-1 \geq y-1 \geq z-1 > 0$. Також з нерівності трикутника випливає, що $x < y+z$. Якщо припустити, що $x \geq y+z-1$, то тоді $y+z-1 \leq x < y+z$, тобто $y+z-1=x$. Тоді периметр трикутника $2000 = x+y+z = 2x+1$, що неможливо. Отже, $x < y+z-1$. А це означає, що $x-1 < (y-1)+(z-1)$ і отже, $x-1$, $y-1$, $z-1$ — сторони трикутника з периметром 1997. Тоді $f(2000) \leq f(1997)$. Таким чином, $f(2000) = f(1997)$.

ТЕОРІЯ ЧИСЕЛ

Задача 1

Знайти найменше число, що закінчується цифрою 7 і збільшується в 5 разів, якщо цю останню цифру перенести на початок числа.

Розв'язання

Нехай шукане число має вигляд $\ldots abc7$. Тоді, згідно з умовою,

$$5(\ldots abc7) = 7\ldots abc, \qquad (1)$$

і, перемноживши, отримуємо, що $c = 5$. Якщо ми тепер підставимо отримане значення c у рівність (1), то маємо: $5(\ldots ab57) = 7\ldots ab5$, звідки, виконавши множення дістанемо: $b = 8$. Продовжуючи такі дії доти, поки не отримаємо вперше цифру 7, ми знаходимо шукане число 142 857.

Відповідь. 142 857.

Задача 2

Усі двозначні числа від 19 до 93 записані послідовно і таким чином утворюють число $N = 19202122..919293$. На який найбільший степінь трійки ділиться N.

Розв'язання

Для перевірки подільності числа $N = 19202122..919293$ на 3 або 9 ми повинні знайти суму цифр числа N. Цифра 1 зустрічається 9 разів у числах від 19 до 93 (у 19, 21,31, ..., 91); цифра 2 — 18 разів (у 20, 21, 22, ...29, 32, 42, ..., 92). Продовжуючи наші міркування далі, знаходимо, що сума цифр числа N дорівнює 717. Це число ділиться на 3 (оскільки $7 + 1 + 7 = 15$ ділиться), проте не ділиться на 9. Отже, найвищим степенем трійки, на який ділиться N — є число 3.

Відповідь. 3.

Задача 3

Довести, що якщо існують натуральні числа x, y, z і $n > 1$, такі, що $x^n + y^n = z^n$, то кожне з чисел x, y, z більше за n.

Розв'язання

Очевидно, що z більше і за x, і за y. Припустимо, що $y \geq x$. Оскільки $z > y$, то $z \geq y+1$. Далі:

$$x^n = z^n - y^n = (z-y)\left(z^{n-1} + z^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}\right) \geq \left((y+1)-y\right)nx^{n-1},$$

тобто:

$$x^n > nx^{n-1} \text{ або } x > n.$$

З цього і випливає, що z, x, y більші за n.

Задача 4

Дано два взаємно простих числа m і n, більших за одиницю. Довести, що число $\frac{\lg m}{\lg n}$ не є раціональним.

Розв'язання

Припустимо супротивне, а саме:

Нехай $\frac{\lg m}{\lg n} = \frac{a}{b}$, де a, b — цілі числа. Але тоді ми матимемо $m^b = n^a$, що неможливо, оскільки m та n не мають спільних дільників, а a та b — цілі. З цього випливає, що дане число не є раціональним.

Задача 5

Довести, що якщо a, b, x та y — цілі числа, більші за одиницю, а числа a і b взаємно прості і $x^a = y^b$, то мають місце рівності $x = n^b$ та $y = n^a$ для деякого натурального числа $n > 1$.

Розв'язання

Перш за все зазначимо, що множини простих дільників числа x і простих дільників числа y рівні. Нехай p — довільний простий дільник числа x (відповідно, і числа y також) і припустимо, що він входить у x у степені α, а в y — у степені β (тобто p^α — найбільший степінь простого числа p, на який ділиться x і p^β — найбільший степінь числа p, на який ділиться y). Тоді маємо:

$$x^a = y^b,$$

звідки

$$p^{\alpha a} = p^{\beta b} \text{ і } \alpha a = \beta b.$$

Тоді $\beta b \vdots a$ і $\alpha a \vdots b$. Оскільки $(a,b)=1$, то $\beta \vdots a$ і $\alpha \vdots b$. Запишемо: $\beta = a\beta_p$ і $\alpha = b\alpha_p$. Тоді $p^{\alpha a} = p^{\beta b}$, $p^{ab\alpha_p} = p^{ab\beta_p}$, звідки $\alpha_p = \beta_p$.

Для кожного простого дільника p числа x (відповідно й y) ми знаходимо натуральне число α_p. Натуральне число $n = \prod_{n\ p} p^{\alpha_p}$ задовольняє умову задачі.

Задача 6

Знайти всі пари натуральних чисел (m,n), для яких число $2^m + 3^n$ є квадратом деякого натурального числа.

Розв'язання

Нехай $2^m + 3^n = a^2$. Оскільки квадрат натурального числа при діленні на три може давати остачу або 0, або 1, то m — парне число (тому, що будь-який непарний степінь числа 2 дає остачу два при діленні на три). Аналогічно, використовуючи той факт, що квадрат натурального числа при діленні на 4 дає остачі 0 або 1, отримуємо, що число n є також парним. Нехай $m = 2r$ і $n = 2s$. Тоді маємо:

$$2^{2r} = a^2 - 3^{2s} = (a-3^s)(a+3^s).$$

Звідси випливає, що $a - 3^s = 2^t$ і $a + 3^s = 2^{2r-t}$. Тоді, віднявши від другого рівняння перше, ми маємо: $2\cdot 3^s = 2^t(2^{2r-2t}-1)$, звідки $t=1$. Таким чином, $a-3^s = 2$ і $a+3^s = 2^{2r-1}$, тобто $3^s = 2^{2r-2}-1$. Нехай $s>1$, тоді $r \geq 3$. Але тоді останнє рівняння не має змісту, оскільки при діленні на 8 ліва частина 3^s дає остачу 1 або 3, тоді як права частина дає остачу 7. Отже, $s=1$ — єдиний можливий варіант у цьому випадку $n=2$ і ми маємо рівність $2^4 + 3^2 = 25$. Таким чином, $(m,n) = (4,2)$ — єдиний розв'язок.

Відповідь. (4, 2).

Задача 7

Довести, що $n^4 + 4^n$ — складене число для довільного натурального $n > 1$.

Розв'язання

Якщо n парне число, то $n^4 + 4^n$ — парне число, більше за 2, а тому не є простим. Отже, нехай n — непарне, тоді $n+1$ — парне. Покажемо, що число $n^4 + 4^n$ завжди може бути розкладеним на прості множники.

$$n^4 + 4^n = n^4 + 2^{2n} = \left(n^2 + 2^n\right)^2 - 2^{n+1} n^2 =$$

$$= \left[\left(n^2 + 2^n\right) + 2^{\frac{n+1}{2}} n\right]\left[\left(n^2 + 2^n\right) - 2^{\frac{n+1}{2}} n\right].$$

Залишається лише показати, що обидва множники більші за 1 при $n > 1$.

Задача 8

Знайти всі чотиризначні числа, що мають наступні властивості:

а) це число є квадратом деякого натурального числа;

б) перші дві цифри рівні між собою;

в) останні дві цифри рівні між собою.

Розв'язання

Нехай $n = \overline{aabb}$ — шукане число. Оскільки n є квадратом натурального числа, то b може набувати значення лише 1, 4, 5, 6 або 9. Серед них 1, 5, 6 і 9 не задовольняють умову, оскільки числа $\overline{aa11}$, $\overline{aa55}$ та $\overline{aa99}$ дають остачу 3, а $\overline{aa66}$ дає остачу 2 при діленні на 4, що неможливо, якщо n — повний квадрат. Отже, b може бути лише 4. Очевидно, що число 11 є дільником числа $\overline{aabb}$. Оскільки n — повний квадрат, а 11 — просте число, то $n = 11 \cdot \overline{a0b}$ ділиться на 11^2 або, що те ж саме, число $\overline{a0b}$ ділиться на 11. Згідно з ознакою подільності на 11, $a + b$ повинно ділитись на 11. Оскільки b може дорівнювати лише 4, то $a = 7$. Перевірка показує, що дійсно, число 7744 задовольняє умову задачі ($7744 = 88^2$) і є єдиним.

Відповідь. 7744.

Задача 9

Довести, що

$$abc\left(a^3 - b^3\right)\left(b^3 - c^3\right)\left(c^3 - a^3\right)$$

ділиться на 7 для довільних цілих чисел a, b, c.

Розв'язання

Ця задача використовує той факт, що куб довільного натурального числа при діленні на 7 дає остачі 0, 1 або 6.

Якщо хоча б одне з чисел a, b, c ділиться на 7, то й вираз також ділиться на 7. Отже, припустимо, що жодне з чисел a, b, c не ділиться без остачі на 7. Тоді можливі остачі чисел a^3, b^3, c^3 при діленні на 7 — 1 або 6. Тоді, за принципом Діріхле, двоє з цих чисел дають однакову остачу при діленні на 7, а їхня різниця ділиться на 7 без остачі, а отже, на 7 ділиться і весь поданий в умові задачі вираз.

Задача 10

Який найбільший тризначний простий дільник числа C_{2000}^{1000}?

Розв'язання

Маємо: $C_{2000}^{1000}=\dfrac{2000!}{(1000!)^2}$. Слідкуватимемо за тризначними простими числами, які зустрічаються частіше в чисельнику, ніж у знаменнику. Оскільки знаменник є квадратом, то його прості множники входять у парному степені. Тому шукатимемо прості числа, які зустрічаються лише двічі в знаменнику, але тричі в чисельнику. Оскільки $\dfrac{2000}{3}=666\dfrac{2}{3}$, то шукані числа можуть бути менші за це число, а найбільшим таким простим числом є число 661.

Відповідь. 661.

Задача 11

Довести, що якщо

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c},$$

де a, b, c — взаємно прості натуральні числа, то $a+b$ — квадрат деякого натурального числа.

Розв'язання

І спосіб

Оскільки a, b, c — натуральні числа, то $a>c$ і $b>c$. Нехай тоді $a=c+m$ і $b=c+n$, де m, n — натуральні. Тоді матимемо:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}\text{ або }\frac{1}{c+m}+\frac{1}{c+n}=\frac{1}{c}.$$

Після спрощень ми отримаємо: $c^2=mn$.

Зазначимо, що m і n — взаємно прості, оскільки якщо $d>1$ — дільник і m, і n, то він повинен бути дільником c, а отже, і дільником чисел a і b, що суперечить умові. Отже, існують натуральні числа k, l, такі, що $m=k^2$, $n=l^2$. Тоді

$$a+b=c+m+c+n=m+n+2c=k^2+l^2+2kl=(k+l)^2$$

II спосіб

Нехай $d=(a,b)$ — найбільший спільний дільник чисел a та b Покажемо, що $a+b=d^2$ Нехай $a=a_1d$, $b=b_1d$ Оскільки d — найбільший спільний дільник чисел a та b, то $(a_1,b_1)=1$ Маємо

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}\right)=\frac{1}{c} \text{ або } \frac{a_1+b_1}{a_1b_1}=\frac{d}{c}$$

Оскільки $(d,c)=1$ і $(a_1+b_1,a_1b_1)=1$, то маємо $a_1+b_1=d$ і $a_1b_1=c$ Звідки знаходимо

$$a+b=d(a_1+b_1)=d^2$$

Задача 12

Довести, що існує натуральне число n, таке, що $n!$ у десятковій системі числення закінчується рівно 1993-ма нулями

Розв'язання

Потрібно показати, що існує таке число n, для якого 10^{1993} — найбільший степінь 10, на який ділиться $n!$ Оскільки множник 2 входить у $n!$ частіше, ніж множник 5, то достатньо знайти n, для якого 5^{1993} — найвищий степінь 5, на який ділиться $n!$ n ми повинні знайти з рівняння

$$1993=\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{25}\right]+\left[\frac{n}{125}\right]+$$

Проте

$$\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{25}\right]+\left[\frac{n}{125}\right]+ \quad \le\frac{n}{5}+\frac{n}{25}+\frac{n}{125}+ \quad \le\frac{n}{5}\left[1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+ \quad \right]\le\frac{n}{5}\ \frac{5}{4}=\frac{n}{4},$$

тобто $n\ge 7972$ Оскільки

$$\left[\frac{7972}{5}\right]+\left[\frac{7972}{25}\right]+\left[\frac{7972}{125}\right]+\left[\frac{7972}{625}\right]+\left[\frac{7972}{3125}\right]=1989,$$

то ми повинні мати на чотири дільники 5 більше Зазначимо, що $7975!$ має на один дільник 5 більше, і на один дільник 25 більше, ніж $7972!$, а $7985!$ має на 3 дільника 5 більше і на один більше дільник 25 (тобто разом на

4 дільники 5 більше), ніж 7972!. Таким чином, 7985 — шукане число Зауважимо, що 7986, 7987, 7988 і 7989 також задовольняють умову задачі.

Відповідь. 7985.

Задача 13

Знайти остачу від ділення 2^{1990} на 1990.

Розв'язання

Зазначимо, що $1990 = 199 \cdot 10$ і 199 — просте число. Згідно з малою теоремою Ферма, $2^{199} - 2$ ділиться на 199, тобто

$$2^{199} = 199n + 2,$$

для деякого натурального n. Піднесемо обидві частини рівності до 10-го степеня:

$$2^{1990} = (199n + 2)^{10} = (199n)^{10} + C_{10}^{1}(199n)^{9} \cdot 2 + \ldots + 2^{10}.$$

Зазначимо, що 2^{1990} і 2^{10} мають однакову останню цифру 4 і, таким чином, $2^{1990} - 2^{10}$ ділиться на 10. Але $2^{1990} - 2^{10}$ ділиться також на 199, а отже, $2^{1990} - 2^{10}$ ділиться на 1990 або, іншими словами, $2^{10} = 1024$ — остача від ділення 2^{1990} на 1990.

Відповідь. 1024.

Задача 14

Знайти всі невід'ємні пари цілих чисел (x, y), для яких виконується рівність

$$\left(xy - 7\right)^2 = x^2 + y^2.$$

Розв'язання

Неважко помітити, що пари (7, 0) і (0, 7) є розв'язками рівняння. Нехай $x \neq 0$, $y \neq 0$. Виконаємо наступні перетворення:

$$\left(xy - 7\right)^2 = x^2 + y^2;$$

$$\left(xy\right)^2 - 14xy + 49 = x^2 + y^2;$$

$$\left(xy\right)^2 - 12xy + 36 + 13 = x^2 + y^2 + 2xy;$$

$$\left(xy - 6\right)^2 + 13 = \left(x + y\right)^2;$$

$$13=[(x+y)+(xy-6)][(x+y)-(xy-6)].$$

Оскільки 13 — просте число, то воно може бути подано у вигляді добутку множників 1, 13 і —1, —13, тобто:

а) $\begin{cases}(x+y)+(xy-6)=13,\\(x+y)-(xy-6)=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x+y)+(xy-6)=-1,\\(x+y)-(xy-6)=-13.\end{cases}$

Розв'язавши систему, маємо наступні розв'язки: (3,4), (4,3). Таким чином, (7,0), (0,7), (3,4), (4,3) — невід'ємні цілі розв'язки даного в умові рівняння.

Відповідь. (7, 0); (0, 7); (3, 4); (4, 3).

Задача 15

Знайти всі натуральні числа n, для яких:

а) n не є повним квадратом;

б) $[\sqrt{n}]^3$ ділиться на n^2

($[x]$ — найбільше ціле число, що не перевищує x). Відповідь обґрунтувати.

Розв'язання

Нехай $[\sqrt{n}]=k$. Тоді $k^2<n<(k+1)^2$. Також оскільки n^2 ділиться на k^3, то n^2 ділиться і на k^2, а з цього випливає, що n ділиться на k. Можливі два випадки: $n=k^2+k$ або $n=k^2+2k$.

а) Нехай $n=k^2+k$. Тоді оскільки n^2 ділиться на k^3, то $(k^2+k)^2=k^4+2k^3+k^2$ ділиться на k^3, а з цього випливає, що $k^2 \vdots k^3$, що можливо лише при $k=1$, тобто при $n=2$.

б) Нехай $n=k^2+2k$. Тоді n^2 ділиться на k^3, тобто

$$(k^2+2k)^2 \vdots k^3 \text{ або } (k^4+4k^3+4k^2) \vdots k^3.$$

З останнього випливає, що $4k^2 \vdots k^3$, тобто $4 \vdots k$. Тому $k=1$, 2 або 4. Коли $k=1$, 2, 4, то маємо для n такі відповідні значення: 3, 8 або 24. Отже, $n=2$, 3, 8 та 24 — усі можливі натуральні числа, які задовольняють умову задачі.

Відповідь. 2, 3, 8, 24.

Задача 16

Довести, що добуток будь-яких чотирьох послідовних натуральних чисел не може бути кубом натурального числа.

Розв'язання

Розглянемо добуток $n(n+1)(n+2)(n+3)$ чотирьох послідовних натуральних чисел. Якщо $n=1$, то $1\cdot2\cdot3\cdot4=24$, і умова виконуються. Доведемо, що при $n>1$ добуток не є кубом числа. Зазначимо, що добуток двох взаємно простих чисел є кубом лише тоді, коли кожне з цих чисел є кубом натурального числа. Розглянемо два випадки:

а) Нехай n — парне. Тоді числа $n+1$ і $n(n+2)(n+3)$ — взаємно прості. Таким чином, якщо добуток $n(n+1)(n+2)(n+3)$ є кубом натурального числа, то і $n+1$, і $n(n+2)(n+3)$ є кубами натуральних чисел. Проте $n(n+2)(n+3)$ ні при яких натуральних n не є кубом, оскільки знаходиться між двома послідовними кубами:

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1<n(n+2)(n+3)$$

$$n(n+2)(n+3)<(n+2)^3=n^3+6n^2+12n+8.$$

б) Нехай n — непарне. Доведення аналогічне попередньому, з урахуванням, що числа $n(n+1)(n+3)$ і $n+2$ взаємно прості.

Задача 17

а) Знайти всі такі натуральні числа n, для яких $2^{3^n}+1$ ділиться без остачі на 3^{n+1}.

б) Довести, що $2^{3^n}+1$ не ділиться на 3^{n+2} при будь-якому натуральному n.

Розв'язання

Для обох частин задачі доведення проведемо методом математичної індукції.

а) Для $n=1$, $2^3+1 \vdots 3^2$, а тому твердження правильне при $n=1$.

Припустимо, що $2^{3^k}+1$ ділиться на 3^{k+1} для деякого k. Покажемо, що $2^{3^{k+1}}+1$ ділиться на 3^{k+2}.

Оскільки $2^{3^k}+1$ ділиться на 3^{k+1}, то $\left(2^{3^k}+1\right)^3$ ділиться на $(3^{k+1})^3$, тобто:

$$2^{3^{k+1}}+1+3\cdot2^{3^k}\left(2^{3^k}+1\right) \vdots 3^{3k+3}.$$

а оскільки $3k+3>k+2$, то:

$$2^{3^{k+1}}+1+3\cdot 2^{3^k}\left(2^{3^k}+1\right)\vdots 3^{k+2}.$$

Проте $2^{3^k}+1\vdots 3^{k+1}$ за індуктивним припущенням і тоді $3\cdot\left(2^{3^k}+1\right)\vdots 3^{k+2}$. А з цього випливає: $2^{3^{k+1}}+1\vdots 3^{k+2}$, що і потрібно було показати.

б) Доведемо методом математичної індукції, що $2^{3^n}+1$ не ділиться на 3^{n+2} при будь-якому натуральному *n*. Для $n=1$ маємо: 2^3+1 не ділиться на 3^3. Припустимо, що $2^{3^k}+1$ не ділиться на 3^{k+2} для деякого *k*. Повторюючи дії аналогічні діям у першій частині задачі, отримаємо:

$$2^{3^{k+1}}+1+3\cdot 2^{3^k}\left(2^{3^k}+1\right)\vdots 3^{k+3}.$$

Якщо $2^{3^{k+1}}+1$ ділиться на 3^{k+3}, то і $3\cdot 2^{3^k}\left(2^{3^k}+1\right)$ ділиться на 3^{k+3}, звідки випливає, що $2^{3^k}+1$ ділиться на 3^{k+2}, що суперечить індуктивному припущенню. Таким чином, $2^{3^{k+1}}+1$ не ділиться на 3^{k+3}.

Задача 18

Довести, що існує безліч натуральних чисел *A*, таких, що $2A$ є квадратом натурального числа, $3A$ — кубом, $5A$ — п'ятим степенем натурального числа.

Розв'язання

Перш за все зазначимо, що *A* ділиться на 2, 3 та 5. Отже, подамо число *A* у вигляді $A=2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}$. Згідно з умовою, помічаємо, що числа $\alpha+1$, β, γ діляться на 2; α, $\beta+1$, γ діляться на 3; α, β, $\gamma+1$ діляться на 5. Щоб виконувались ці умови, подамо α, β, γ у вигляді: $\alpha=15+30n$; $\beta=20+30n$; $\gamma=24+30n$. Оскільки *n* пробігає множину усіх натуральних чисел, то ми отримуємо нескінченну множину чисел *A*. До речі, числа вигляду $A=2^{15}3^{20}5^{24}n^{30}$, $n\in N$ також задовольняють умову задачі.

Задача 19

Знайти всі прості числа *p*, для яких існують цілі *x* та *y*, що задовольняють рівності

$$p+1=2x^2 \text{ і } p^2+1=2y^2.$$

Розв'язання

Ми можемо прийняти, що обидва числа *x* та *y* натуральні. Зазначимо також, що *p* непарне. Знайдемо різницю між рівностями:

$$p^2 - p = 2(y^2 - x^2);\ p(p-1) = 2(y-x)(y+x).$$

Оскільки p непарне, то p не ділиться на 2. Якщо $y-x$ ділиться на p, то $p \le y-x$. Але тоді $p-1 \ge 2y+2x$, що неможливо. З цього випливає, що $y+x$ має ділитись на p. З цього випливає, що $p \le y+x$ і $p-1 \ge 2(y-x)$. Виключаючи y, матимемо: $p+1 \le 4x$. Оскільки $p+1 = 2x^2$, то отримуємо, що $2x^2 \le 4x$, і тому $x \le 2$. Якщо $x=1$, то отримуємо. $p=1$, що неможливо. Якщо $x=2$, то $p=7$. Таким чином, $p=7$ — єдине просте число, що задовольняє умову задачі.

Відповідь. 7.

Задача 20

Знайти всі трійки (a, b, c) натуральних чисел, для яких

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = 3.$$

Розв'язання

Вважатимемо, що $a \ge b \ge c$. Тоді з поданої в умові рівності випливає, що $3 \le \left(1+\frac{1}{c}\right)^3$. Якщо $c \ge 3$, то

$$\left(1+\frac{1}{c}\right)^3 \le \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} < 3.$$

Таким чином, $c=1$ або 2. Розглянемо випадок $c=1$. Отримуємо:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = \frac{3}{2}.$$

З останньої рівності випливає, що $ab-2a-2b-2=0$. Це може бути записане у вигляді $(a-2)(b-2)=6$. Маємо: $(a-2,\ b-2)=(6,\ 1)$ або $(3,2)$, тобто $(a,\ b)=(8,\ 3)$ або $(5,4)$.

У випадку при $c=2$, аналогічно отримуємо: $(a-1)(b-1)=2$. Розв'язуючи це рівняння в натуральних числах, одержуємо, що $(a, b) = (3,2)$. Отже, впорядкованими розв'язками є трійки

$$(a, b, c) = (8,\ 3,\ 1),\ (5,\ 4,\ 1),\ (3,\ 2,\ 2).$$

Відповідь. (8, 3, 1), (5, 4, 1), (3, 2, 2).

Задача 21

Дано довільне натуральне число n. Довести, що існують два додатних раціональних числа a і $b(a \neq b)$, які не є цілими, але для яких числа $a-b$, a^2-b^2, a^3-b^3, ..., a^n-b^n цілі.

Розв'язання

Візьмемо, наприклад, $a=2^n+\frac{1}{2}$, $b=2^{n+1}+\frac{1}{2}$. Очевидно, що обидва цих числа є раціональними, проте не цілими. Помітимо, що $a-b$ — ціле число. Оскільки в розкладі на множники a^k-b^k фігурує множник $a-b$, можна стверджувати, що числа a^k-b^k цілі при $1 \le k \le n$.

Задача 22

Знайти всі прості числа p, для яких вираз $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ є квадратом натурального числа.

Розв'язання

При $p=2$ маємо, що частка не ціле число, і можемо зробити висновок, що p непарне. Згідно з малою теоремою Ферма, $2^{p-1}-1$ ділиться на p. Припустимо, що для деякого натурального числа a $2^{p-1}-1=pa^2$. Оскільки p — непарне число, то:

$$\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)=pa^2.$$

Обидва множники зліва непарні і взаємно прості між собою. З цього випливає, що лише один з цих множників ділиться без остачі на p. Тому або

$$2^{\frac{p-1}{2}}-1=px^2,\ 2^{\frac{p-1}{2}}+1=y^2,$$

або

$$2^{\frac{p-1}{2}}-1=x^2,\ 2^{\frac{p-1}{2}}+1=py^2.$$

а) Нехай $2^{\frac{p-1}{2}}-1=px^2$, $2^{\frac{p-1}{2}}+1=y^2$. Але тоді $2^{\frac{p-1}{2}}=(y-1)(y+1)$, яке можливе лише при $y=3$, тобто при $p=7$. Безпосередньою перевіркою переконуємось, що $p=7$ задовольняє умову задачі.

б) Нехай $2^{\frac{p-1}{2}}-1=x^2$, $2^{\frac{p-1}{2}}+1=py^2$. Тоді при $p>3$ ми отримуємо, що x^2 при діленні на 4 дає в остачі 3, що неможливо. Тому p може бути рівним лише 3. Перевірка показує, що $p=3$ задовольняє умову задачі.

Отже, лише при простих $p=3$ і 7 вираз $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ є квадратом натурального числа.

Відповідь. 3; 7.

Задача 23

Розв'язати в цілих числах:

$$x+y=1-z;\ x^3+y^3=1-z^2.$$

Розв'язання

Виключаючи z з даних в умові рівностей, матимемо:

$$x^3+y^3+\left[1-(x+y)\right]^2=1.$$

Ця рівність еквівалентна наступній:

$$(x+y)\left(x^2-xy+y^2+x+y-2\right)=0.$$

а) Нехай $x+y=0$. Тоді $z=1$ і $(x,y,z)=(m,-m,1)$, $m\in Z$ — множина розв'язків.

б) Нехай $x+y\neq 0$. Тоді: $x^2-xy+y^2+x+y-2=0$.

Останнє рівняння може бути записане у вигляді:

$$(2x-y+1)^2+3(y+1)^2=12.$$

Можливі такі випадки:

$$2x-y+1=0,\ y+1=\pm 2 \text{ або } 2x-y+1=\pm 3,\ y+1=\pm 1.$$

Аналізуючи всі ці випадки, отримуємо наступні розв'язки:

$$(0,1,0),\ (-2,-3,6),\ (1,0,0),$$

$$(0,-2,3),\ (-2,0,3),\ (-3,-2,6).$$

КОНСТРУКЦІЇ

Задача 1

У кожній із 64 клітинок шахової дошки записано натуральне число, причому таким чином, що число, яке записане в даній клітинці, дорівнює середньому арифметичному чисел, що записані в сусідніх до даної клітинках (дві клітинки називаються сусідніми, якщо вони мають спільну сторону чи вершину. Таким чином, залежно від положення на дошці, клітинка може мати 3, 5 чи 8 сусідніх клітинок). Довести, що всі записані числа рівні.

Розв'язання

Розглянемо найменше значення серед 64 чисел дошки. Оскільки воно є середнім арифметичним своїх сусідів, то числа повинні бути рівні йому, оскільки це число є найменшим. Тоді найменші числа утворюють квадрат на дошці. Розглядаючи всі ці числа, доходимо висновку, що всі записані числа рівні.

Задача 2

Нехай T — множина трійок цілих чисел (a,b,c), таких, що $1 \le a < b < c \le 6$. Для кожної трійки $(a,b,c) \in T$ розглянемо добуток abc. Додамо всі такі добутки. Довести, що отримана сума ділиться на 7.

Розв'язання

Для кожної трійки $(a,b,c) \in T$ трійка $(7-a, 7-b, 7-c)$ також належить T, причому ці трійки різні, оскільки $7 \ne 2b$. Групуючи парами (a,b,c) та $(7-a, 7-b, 7-c)$, тобто всі трійки множини T, дістаємо, що сума добутків кожної пари $abc+(7-a)(7-b)(7-c)$ ділиться на 7, а отже, і вся сума також ділиться на 7.

Задача 3

П'ять чоловіків A, B, C, D, E одягнули капелюхи або білого, або чорного кольору, причому ніхто з них не знає, капелюх якого кольору на ньому. Відомо, що чоловік, який одягнув чорний капелюх, завжди говорить правду, тоді як чоловік, який одягнув білий капелюх, завжди говорить неправду. Четверо з них висловили наступні твердження:

A: Я бачу три чорних і один білий капелюх.

B: Я бачу чотири білих капелюхи.

C: Я бачу один чорний і три білих капелюхи.

D: Я бачу чотири чорних капелюхи.

Визначити, капелюх якого кольору на кожному з чоловіків.

Розв'язання

Припустимо, E одягнув білий капелюх. Тоді D сказав неправду, а отже, на ньому білий капелюх. Оскільки і D, і E в білому капелюсі, то A сказав неправду, а отже, на ньому також білий капелюх. Якщо C сказав правду, то на ньому повинен бути чорний капелюх і з його слів на B також повинен бути чорний капелюх. Але B не помітив чорного капелюха на C, тому сказав неправду і не може бути в чорному капелюсі. Отже, C сказав неправду. Але тоді він у білому капелюсі, що означає, що B сказав правду і, отже, на B чорний капелюх. Але тоді це підтверджує правильність слів C, що неможливо за припущенням.

Таким чином, E повинен бути в чорному капелюсі. Це означає, що B сказав неправду, тому він у білому капелюсі. Але тоді D сказав неправду і, отже, він у білому капелюсі також. A також сказав неправду і тому теж повинен бути в білому капелюсі. Отже, C сказав правду і він в чорному капелюсі. Таким чином, A, B, D — у білих капелюхах, а C та E — у чорних.

Задача 4

Нехай f — бієктивна функція, що відображає множину $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ саму в себе. Довести, що існує натуральне число $M > 1$, таке, що $f^M(i) = f(i)$ для кожного $i \in A$ (тут f^M позначає композицію M функцій $f \circ f \circ \ldots \circ f$).

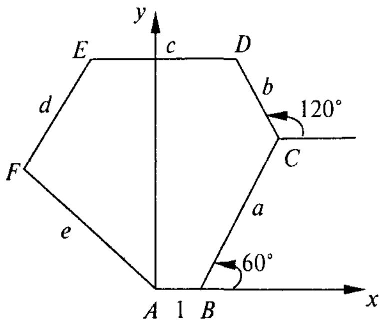
Розв'язання

Візьмемо довільний елемент r з множини A і розглянемо послідовність: r, $f(r)$, $(f \circ f)(r)$, $(f \circ f \circ f)(r)$, ... Оскільки множина A містить лише n елементів, то ця послідовність повинна повторюватись. Коли відбудеться перше повторення, то цим елементом повинен бути r, тому що в противному разі послідовність матиме вигляд: $r, a, b, c, d, e, c, \ldots$,

$c \neq r$, з чого випливає $f(b) = c$ та $f(e) = c$, що суперечить тому, що функція f — бієкція. Таким чином, для деякого натурального $l_r \geq 1$ маємо: $f^{l_r} = r$. Це справедливо для будь-якого r з множини A. Нехай M — найменше спільне кратне чисел $l_1, l_2, ..., l_n$. Тоді $f^M(r) = r$ для кожного $r \in A$.

Задача 5

Довести, що на площині існує опуклий шестикутник, такий, що всі його внутрішні кути рівні і його сторони рівні 1, 2, 3, 4, 5, 6 у деякому порядку.



Розв'язання

І спосіб

Нехай $ABCDEF$ — шестикутник з рівними кутами, сторони якого рівні 1, 2, 3, 4, 5, 6 у деякому порядку. Не втрачаючи загальності, нехай $AB = 1$, $BC = a$, $CD = b$, $DE = c$, $EF = d$, $FA = e$.

Оскільки сума кутів шестикутника 720°, то кожний кут трикутника дорівнює 120°. Помістимо цей шестикутник у прямокутну декартову систему координат, причому нехай $A(0;0)$, $B(1;0)$. Тоді:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(1;0)},\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{(a\cos 60^\circ; a\sin 60^\circ)},$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{(b\cos 120^\circ; b\sin 120^\circ)},\ \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{(c\cos 180^\circ; c\sin 180^\circ)} = \overrightarrow{(-c;0)},$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{(d\cos 240^\circ; d\sin 240^\circ)},\ \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{(e\cos 300^\circ; e\sin 300^\circ)}.$$

Оскільки сума всіх цих шести векторів дорівнює $\vec{0}$, то додаючи відповідні координати векторів отримаємо:

$$1 + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - c - \frac{d}{2} + \frac{e}{2} = 0,$$

$$(a + b - d - e)\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Тоді:

$$a-b-2c-d+e+2=0, \tag{1}$$

$$a+b-d-e=0. \tag{2}$$

Оскільки $\{a,b,c,d,e\}=\{2,3,4,5,6\}$, то тоді, з огляду на (2), матимемо:

а) $\{a,b\}=\{2,5\}$, $\{d,e\}=\{3,4\}$, $c=6$;

б) $\{a,b\}=\{3,6\}$, $\{d,e\}=\{4,5\}$, $c=2$;

в) $\{a,b\}=\{2,6\}$, $\{d,e\}=\{3,5\}$, $c=4$.

Решту випадків не розглядатимемо, оскільки вони аналогічні цим трьом. Наприклад, якщо $\{a,b\}=\{3,4\}$, $\{d,e\}=\{2,5\}$, то такий шестикутник, якщо він існує, можна отримати з випадку а) шляхом симетрії відносно прямої $x=\frac{1}{2}$.

Розглянемо окремо кожний з цих випадків:

а) У цьому випадку $(a-b)-(d-e)=2c-2=10$. Оскільки $a-b=\pm3$, $d-e=\pm1$, то цей випадок неможливий.

б) Маємо: $(a-b)-(d-e)=2c-2=2$. Тоді $(a,b,d,e)=(6,3,5,4)$.

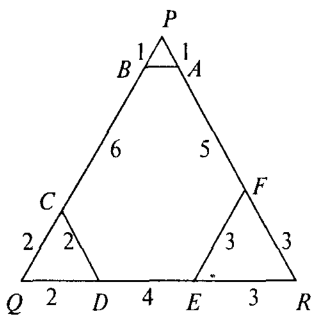
в) У цьому випадку $(a-b)-(d-e)=2c-2=6$. Тоді $(a,b,d,e)=(6,2,3,5)$.

Таким чином, шуканий шестикутник існує, причому сторони його послідовно розташовані наступним чином:

$$(1,6,3,2,5,4) \text{ або } (1,6,2,4,3,5).$$

II спосіб

Розглянемо рівносторонній трикутник зі сторонами 9. Видалимо з трьох його кутів рівносторонні трикутники зі сторонами 1, 2 і 3 одиниці відповідно. Шестикутник, що залишився, має рівні кути (по 120°), і його сторони рівні 1, 6, 2, 4, 3, 5 одиниць.



Задача 6

У кожній з восьми вершин куба написано +1 або −1, а на кожній з шести граней написано добуток чисел, що знаходяться у вершинах цієї грані. Отримані 14 чисел додали. Чи можна розставити числа +1 та −1 у вершинах куба таким чином, щоб ця сума дорівнювала нулю?

Розв'язання

Нехай x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 та x_8 — числа, що записані у вершинах. Тоді шукана сума дорівнює

$$\sum_{i=1}^{8} x_i + x_1x_2x_3x_4 + x_5x_6x_7x_8 + x_1x_4x_5x_8 + x_2x_3x_6x_7 + x_1x_2x_5x_6 + x_3x_4x_7x_8.$$

Оскільки маємо чотирнадцять доданків, кожний з яких може бути або + 1, або – 1, то ця сума може дорівнювати нулю лише в тому випадку, коли деякі сім доданків рівні + 1 та деякі сім рівні – 1. Але добуток цих чотирнадцяти доданків

$$\left(x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8\right)^4 = (\pm1)^4 = 1.$$

А це означає, що не може бути непарною кількість доданків, що дорівнюють – 1 у вище зазначеній сумі. Таким чином, ця сума ніколи нулю не дорівнює.

Задача 7

Дано 7-елементну множину $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$. Знайти множину T всіх трьохелементних підмножин множини A таких, що кожна пара елементів множини A входить лише в одну підмножину множини T.

Розв'язання

Одна з можливих таких множин складається з трьохелементних множин $\{a,b,c\}$, $\{a,d,e\}$, $\{a,f,g\}$, $\{b,d,f\}$, $\{b,e,g\}$, $\{c,e,f\}$, $\{c,d,g\}$. Можуть бути отримані й інші множини з даної перестановкою літер. Не втрачаючи загальності, елемент a може бути пов'язаний з трьома парами b,c; d,e; f,g. Тепер b може бути пов'язаний з d,f та e,g. Можливі випадки, що залишаються для c — пари e,f та d,g. Отримуємо зазначений результат.

Задача 8

Чи можна в кубі $8\times8\times8$ позначити 64 одиничні кубики $1\times1\times1$ так, щоб у кожному шарі кубиків, паралельному його основі, було позначено рівно 8 кубиків, а серед будь-яких 8 позначених кубиків якихось два обов'язково знаходяться в одному такому шарі?

Розв'язання

Можна вважати, що центри кубиків розташовані в точках (x, y, z), де $x, y, z \in Z$, $0 \le x, y, z \le 7$. Позначимо всі клітинки, центри яких мають суму координат, кратну 8. Якщо підрахувати їх кількість, то одержимо рівно 64, по 8 у кожному шарі, паралельному до основи. Припустимо, що нам вдалося вибрати 8 позначених кубиків, жодні два із яких не лежать в одному шарі, паралельному до основи. Тоді сума координат цих кубиків дорівнює потроєній сумі чисел від 0 до 7. Цього не може бути, бо це число не ділиться на 8. Отже, вибрані 64 кубики задовольняють всі умови задачі.

Задача 9

На дошці виписано декілька, відмінних від нуля, дійсних чисел. Довести, що серед них знайдеться таке, для якого серед виписаних немає числа ні втричі більшого, ні вдвічі меншого.

Розв'язання

Нехай a — одне із виписаних чисел. Розглянемо всі дані числа вигляду $\frac{3^n a}{2^m}$, де m і n цілі невід'ємні числа. Тоді для того з них, у якого величина $m+n$ максимальна, не буде ні втричі більшим, ні вдвічі меншим.

Задача 10

Нехай Ω — фігура, яка складається з одиничних клітинок координатної площини, які цілком міститься в квадраті

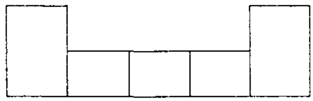
$$\{(x, y): |x|+|y| \le n+1\},$$

де n — натуральне число, $n > 2$. Для довільного покриття фігури Ω доміношками (прямокутниками 1×2) дозволяється здійснювати таку операцію: вибрати квадрат 2×2, покритий рівно двома доміношками, і повернути його на кут $90°$. Довести, що не більше ніж за $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ операцій із довільного покриття можна одержати покриття, яке складається тільки з горизонтально розташованих доміношок.

Розв'язання

Спочатку доведемо таке допоміжне твердження.

Лема. Припустимо, що у нашому покритті зустрінеться фрагмент вигляду



Нехай у ньому k горизонтальних доміношок розташовані між двома вертикальними, k — ціле число, $k \geq 0$ Тоді за допомогою не більш ніж $2k+1$ операцій можна домогтися того, щоб ліва нижня клітинка цього фрагменту була покрита горизонтальним доміно При цьому всі доміношки, які лежать нижче або лівіше вказаного фрагменту, залишаться в попередніх положеннях

Доведення

Будемо називати описаний в умові леми фрагмент «k-паркет» Міркування будемо здійснювати індукцією по k База для $k=0$ (для «паркету», що складається з двох вертикальних доміношок) очевидна Розглянемо доміношки, які покривають $2k$ клітинок, розташованих над горизонтальними доміношками «k-паркету» Всі ці доміношки є об'єднанням декількох «паркетів» меншого розміру і, можливо, ще декілька горизонтальних доміно, розташованих з боків Розглянемо нижній лівий із цих паркетів За припущенням індукції, ліву нижню клітинку цього паркету можна покрити горизонтальним доміно, зробивши не більш ніж $2k-1$ заданих операціи Після цього потрібно ще дві операціи для того, щоб ліва нижня клітинка нашого «k-паркету» була покритою горизонтальним доміно Лема доведена

Тепер зовсім нескладно довести твердження задачі Нижні дві клітинки фігури Ω можна покрити горизонтальним доміно, застосувавши для цього не більш ніж одну операцію Якщо $k-1$ нижніх горизонтальних рядів уже покриті горизонтальними доміно, то для того, щоб покрити горизонтальними доміно k-и горизонтальний рядок, потрібно здійснити не більш ніж k^2 заданих операцій Дійсно, для того, щоб покрити горизонтальним доміно крайню ліву клітинку цього ряду потрібно здійснити не більш ніж $2k-1$ операціи, для того, щоб покрити після цього наступну зліва клітинку горизонтальним доміно, потрібно здійснити не більш ніж $2k-3$ операцій, і так далі Таким чином, для покриття k -го ряду горизонтальними доміно потрібно здійснити не більш ніж $(2k-1)+(2k-3)+...+1=k^2$ операцій.

Отже, для того, щоб нижня половина фігури Ω виявилася покритою горизонтальним доміно, потрібно буде здійснити не більш ніж $1^2+2^2+...+n^2$ операцій. Помічаємо, що верхня половина фігури Ω автоматично буде покрита горизонтальними доміно. Оскільки

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

то твердження задачі доведено повністю.

Задача 11

360 точок розбивають коло на рівні дуги. Проведено 180 хорд, які попарно не перетинаються, з вершинами в цих точках. Розглянемо ще 180 хорд, які отримуються із даних поворотом кола на кут 38°. Довести, що об'єднання цих 360 хорд не може складати собою замкнену ламану лінію.

Розв'язання

Виріжемо із паперу круг і намалюємо подані 180 хорд на його верхній частині, а повернуті — на нижній. Хорди на верхній частині розбивають її на 181 частин. Пофарбуємо ці частини у два кольори так, щоб сусідні були різного кольору. Нехай 91 частина пофарбована в чорний колір, а решта 90 частин — у білий. Повторимо фарбування на нижній стороні круга, повернувши їх усі на 38°. Оскільки на граничних дугах кольори змінюються по черзі, а кут повороту парний, то чорні області нижньої частини продовжують чорні області верхньої частини при переході через край. Припустимо, що всі хорди утворюють одну замкнену ламану лінію (з ланками, розташованими поперемінно на двох частинах круга). Трішки відступивши від кожної ланки ламаної всередину чорної області, одержимо замкнений шлях, який проходить по чорних областях і при цьому відвідує кожну із них. Таким чином, будь-які дві чорні області можна з'єднати за допомогою декількох переходів через край круга. Але це неможливо, бо всього є $2n+2$ чорні області і $2n$ чорних дуг на краю круга, що їх з'єднують. Адже множина, яка складається із $2n+2$ вершин, не може бути зв'язаною за допомогою всього $2n$ сполучень (або, на мові графів, зв'язний граф з $2n+2$ вершинами повинен мати більше ніж $2n$ ребер).

Задача 12

На площині розташовано $2n+1$ різних прямих. Довести, що існує не більш ніж $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ різних гострокутних трикутників, сторони яких лежать на цих прямих.

Розв'язання

Можна вважати, що серед прямих немає ні паралельних, ні перпендикулярних, і жодні три прямі не перетинаються в одній точці (іншими словами, будь-які три прямі утворюють трикутник, причому або гострокутний, або тупокутний). Дійсно, виконання цієї умови можна досягти, повертаючи прямі на дуже малі за величиною кути, а при досить малих кутах повороту існуючі гострокутні трикутники не перестануть бути гострокутними, тому число гострокутних трикутників не зменшиться.

Нехай a і b — кількості відповідно гострокутних і тупокутних трикутників на заданій площині. Будемо називати трикутник, утворений прямими m, k, l, частково гострокутним відносно прямої m, якщо його кути при стороні, яка лежить на прямій m, обидва гострі. Виберемо довільно пряму p із нашого набору і повернемо площину так, щоб ця пряма стала горизонтальною. Інші $2n$ прямих розбиваються на два класи: прямі з додатним коефіцієнтом нахилу до p і з від'ємним коефіцієнтом нахилу до p. Очевидно, що дві прямі утворюють разом з p частково гострокутний трикутник відносно p тоді і тільки тоді, якщо вони належать до різних класів. Тому кількість таких трикутників дорівнює добутку кількостей прямих в обох класах, що, за нерівністю Коші, не перевищує n^2 (бо $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{2n}{2}\right)^2 = n^2$).

Додавши всі такі оцінки для всіх прямих, одержимо, що кількість пар "пряма і частково гострокутний відносно неї трикутник" не перевищує $n^2(2n+1)$. У цій кількості кожний гострокутний трикутник враховується три рази, а тупокутний — один раз. Тому

$$3a+b \le n^2(2n+1).$$

Загальна кількість трикутників дорівнює кількості трійок прямих, тобто

$$a+b=C_{2n+1}^{3}=\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{3!}=\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}.$$

Віднімемо останню рівність від попередньої нерівності, одержимо

$$2a\le\frac{3n^{2}(2n+1)}{3}-\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}=\frac{n(2n+1)(n+1)}{3}.$$

Таким чином, $a\le\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, що й треба було довести.

Зауваження. Оцінка $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ — точна: існує таке розташування $2n+1$ прямих, для якого рівно така кількість гострокутних трикутників. Самостійно придумати таке розташування. Для цього відслідкувати умови, за яких досягається знак рівності в нерівності

$$3a+b\le n^{2}(2n+1).$$

Задача 13

Комп'ютер запрограмований на виконання операції: додавання до натурального числа добутку його цифр, збільшеного на два. Початкове число десятицифрове, обирається випадково. Чи можна, використовуючи багатократно цю операцію, одержати 2005-цифрове число, десятковий запис якого складається лише з одних одиниць і сімок?

Розв'язання

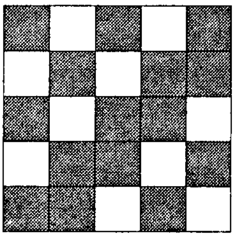
Помічаємо, що коли в деякий момент чергове число стане парним, то і всі далі новоутворені числа будуть парними. Крім того, добуток цифр багатоцифрового числа помітно менший за саме число. Так, якщо число 30-цифрове, то добуток його цифр не більший ніж деяке 29-цифрове число, навіть коли всі його цифри — дев'ятки, бо

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{30}=(0{,}729)^{10}<\left(\frac{3}{4}\right)^{10}=\left(\frac{243}{1024}\right)^{2}<\left(\frac{1}{4}\right)^{2}<\frac{1}{10}.$$

Розглянемо перший момент, коли чергове число, обчислене комп'ютером, стало 31 -цифровим. У силу проведеної оцінки, воно не буде перевищувати числа 1099...99 (29 дев'яток). Оскільки десятковий запис такого числа містить нулі, то комп'ютер збільшить його лише на 2. Якщо число до того часу все ще непарне, то подібні збільшення на 2 будуть здійснюватися до тих пір, поки воно не стане рівним 11...1 (31 одиниця). Після цього число збільшиться на 3 і стане парним. Таким чином, коли число стане 2005-цифровим, то воно буде парним, тобто його десятковий запис не буде складатися лише з одних одиниць і сімок.

Задача 14

Клітинки квадрата 100×100 пофарбовані в чорний і білий кольори так, що в будь-якому прямокутнику 1×2 є хоча б одна чорна клітинка, а в будь-якому прямокутнику 1×6 знайдуться дві чорні клітинки, розташовані поряд. Яка найменша кількість чорних клітинок може бути в цьому квадраті?



Розв'язання

Розглянемо будь-який прямокутник 1×5. Помічаємо, що в ньому не менше 3 чорних клітинки. Дійсно, оскільки в кожному прямокутнику 1×2 є хоча б одна чорна клітинка, то якщо в прямокутнику 1×5 лежить менше ніж 3 чорних клітинки, то їх дві, і вони обидві сусідні з центральною. Але тоді в прямокутнику 1×6, який містить розглянутий прямокутник, не буде двох чорних клітинок, розташованих поруч. Отже, в усьому квадраті не менш ніж 6000 чорних клітинки ($\frac{3}{5}$ від загальної кількості). Приклад можна одержати, якщо розбити квадрат на квадрати 5×5, і пофарбувати їх зазначеним чином.

Задача 15

Чи існує набір із 100 різних натуральних чисел, таких, що сума будь-яких 98 із них ділиться на суму двох, що залишились?

Розв'язання

Припустимо, що існує такий набір чисел a_1, a_2, ..., a_{100}, і s — сума цих чисел. Із умови випливає, що s ділиться на суму будь яких двох чисел набору. Нехай a_1 — найбільше із чисел, тоді $a_1 > \frac{s}{100}$. Розглянемо 99 сум $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$, ..., $a_1 + a_{100}$. Вони повинні бути різними дільника-ми числа s. Але в інтервалі між $\frac{s}{100}$ і s, в якому лежать ці числа, є найбільше 98 дільників числа s: $\frac{s}{2}, \frac{s}{3}, ..., \frac{s}{99}$. Одержане протиріччя і доводить твердження задачі.

Задача 16

У багатоповерховому будинку дуже багато ліфтів, причому кожний ліфт перевозить пасажирів лише між якимись двома поверхами. На кожному з поверхів можна перейти до будь-якого ліфта, який на ньому зупиняється. Відомо, що з будь-якого поверху можна проїхати на будь-який інший, скориставшись парною кількістю ліфтів і не пройшовши будь-який поверх більше ніж один раз. Довести, що за бажання те ж саме можна зробити, скориставшись непарною кількістю ліфтів.

Розв'язання

Нехай поверхи будуть вершинами графа, а ліфти — його ребрами. Шлях вершинами графа будемо називати простим, якщо він не проходить двічі через одну вершину. Тоді достатньо довести, що коли будь-які дві вершини можна з'єднати простим шляхом з парною кількістю ребер, то те ж саме можна зробити і простим шляхом з непарною кількістю ребер. Нехай $A_1, A_2, ..., A_{2n+1}$ — простий шлях парної довжини, що з'єднує вершини A_1 і A_{2n+1}. Доведемо, що їх можна з'єднати простим шляхом непарної довжини. Для цього розглянемо простий шлях парної довжини, що з'єднує вершини A_1 і A_2. Нехай A_k — найближча до A_{2n+1} вершина цього шляху, яка належить і початковому. Тоді, як не важко перевірити, від A_1 до A_k можна дістатися як парним, так і непарним простим шляхом, не проходячи через вершини A_i, де $i > k$. Тоді й до A_{2n+1} можна дістатися як парним, так і непарним простим шляхом.

Задача 17

Набір геометричних фігур складається із червоних правильних трикутників і синіх чотирикутників, усі кути яких більші від 80°, але менші за 100°. Із фігур цього набору склали опуклий многокутник, усі кути якого більші від 60°. Довести, що число (цілком) червоних сторін многокутника ділиться на 3.

Розв'язання

З'ясуємо, як може бути влаштований окіл точки, яка лежить на стороні многокутника. Або вона лежить на стороні однієї із фігурок набору або в ній сходяться декілька кутів таких фігурок, які в сумі дають 180°. Якщо рівно одна або дві із цих фігурок є кутами трикутника, то на кути чотирикутників відповідно залишається 120° або 60°, що неможливо, бо ці кути не можна подати у вигляді суми кутів, більших від 80°, але менших за 100°. Отже, в точці на стороні многокутника можуть сходитися або три трикутники, або тільки чотирикутники, тобто кожна сторона многокутника або червона, або синя.

Аналогічно, в точці всередині многокутника сходяться або жодний, або три, або шість кутів трикутника, бо ні 60°, ні 120°, ні 240°, ні 300° не можна подати у вигляді суми кутів, більших від 80°, але менших за 100°. Отже, кількість тих кутів трикутників, вершини яких лежать всередині або на сторонах многокутника, кратно 3. Тому й кількість тих кутів трикутників, які залишились, — тих, вершини яких попадають у вершини многокутника, — кратно 3. Але до червоних сторін многокутника прилягають рівно два таких кути — по одному в кожного з її кінців. При цьому, жоден із кутів трикутника не прилягає одразу до двох сторін, бо наш многокутник опуклий і не має кутів, дорівнюють 60°. Тому й кількість кутів трикутників з вершинами у вершинах многокутника дорівнює подвоєному числу червоних сторін многокутника, тобто число червоних сторін многокутника також кратно 3.

Задача 18

У таблиці 10×10 розташовані натуральні числа. Відомо, що для будь-яких п'яти рядків і будь-яких п'яти стовпчиків сума 25 чисел, що стоять у їх перетині, парна. Довести, що в таблиці всі числа парні.

Розв'язання

Спочатку доведемо таке допоміжне твердження: якщо в наборі із 10 натуральних чисел сума будь-яких п'яти чисел парна, то і всі 10 чисел будуть парними. Спочатку зазначимо, що всі числа набору мають однакову парність — якби в ньому були два числа різної парності, то, вибравши чотири із чисел, що залишилися, і додавши їх до одного з них та до другого, одержали б дві п'ятірки чисел, з різною парністю їх сум. Усі числа в наборі не можуть бути непарними (інакше будь-які п'ять із них дають непарну суму), тому вони усі парні. Твердження доведено.

Виберемо будь-які п'ять стовпчиків даної таблиці і знайдемо для кожного рядка суму чисел у його перетині з цими стовпчиками. Одержимо 10 сум. За умовою, будь-які п'ять із цих сум дають у сумі парне число. Отже, всі ці суми парні. Оскільки п'ять стовпчиків вибирають довільно, то це означає, що сума будь-яких п'яти чисел в одному рядку парна. Знову, застосовуючи допоміжне твердження (до чисел одного рядка), одержуємо, що всі числа в таблиці парні.

Задача 19

Числа від 1 до $2n$ розбито на дві групи по n чисел у кожній. Довести, що множини остач попарних сум чисел кожної групи при діленні на $2n$ співпадають (у множину попарних сум входять також вирази вигляду $a+a$).

Розв'язання

У цій задачі, обчислюючи остачі при діленні на $2n$, завжди будемо замість остачі брати число $2n$.

Нехай числа a і b (можливо й однакові) належать до першої групи. Нам достатньо знайти два числа із другої групи, сума яких дає таку ж остачу при діленні на $2n$, що і $a+b$. Розіб'ємо числа від 1 до $2n$ на пари таким чином. Нехай $c=\frac{(a+b)}{2}$. Якщо c — ціле число, то розглянемо такі пари чисел (усього $n+1$ пара):

$$(c,c),(c-1,c+1),\ldots,(c-n+1,c+n+1),(c-n,c+n).$$

Щоб утворилися пари чисел із наших множин, візьмемо остачі чисел із цих пар при діленні на $2n$. Побудована множина пар, яка має властивість, що сума чисел у кожній парі має таку ж остачу при діленні на $2n$, що і $(a+b)$, і жодні дві пари не містять одного і того ж числа. Помічаємо, що серед цих пар зустрічається і наша початкова пара

$$(a,b)=\left(c+\frac{a-b}{2},\ c-\frac{a-b}{2}\right).$$

Крім чисел a і b, у першій групі є ще $(n-2)$ числа, а крім пари (a,b), у побудованій множині є ще n пар, тобто обов'язково в якійсь із пар немає жодного з чисел першої групи, і, таким чином, ця пара містить два потрібних числа з другої множини (можливо, однакових). Випадок півцілого c розбирається аналогічно.

Задача 20

На площині заданий рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом довжиною 1. Дозволяється замінити одну вершину трикутника на симетричну їй відносно будь-якої іншої вершини цього трикутника. В результаті декількох таких операцій отримали трикутник зі сторонами a, b і c, причому c — найбільша сторона. Довести, що

$$a+b-c\leq 2-\sqrt{2}.$$

Розв'язання

Помічаємо, що під час виконання вказаних операцій площа трикутника завжди залишається рівною $\frac{1}{2}$, а його вершини завжди будуть лежати у вузлах цілочисельної решітки зі стороною 1. Такий трикутник обов'язково буде мати прямий або тупий кут. Дійсно, якщо це не так, то один із кутів цього трикутника буде не менший від 60°, а довжини прилеглих сторін будуть не менші за 1 (це найменша можлива довжина) і $\sqrt{2}$ (наступна за величиною), тоді його площа буду більшою за $\frac{1}{2}$. Таким чином, сторони a і b, які прилеглі до прямого або тупого кута ставить половину строчки. Тоді радіус вписаного кола цього трикутника не менший за відстань від вершини тупого кута до точки дотику сторони a з колом, тобто $\frac{a+b-c}{2}$. Крім цього, помічаємо, що периметр цього трикутника не менший за $2+\sqrt{2}$. Тому

$$a+b-c\geq 2r=\frac{4S}{P}=\frac{2}{P}\geq\frac{2}{2+\sqrt{2}}=2-\sqrt{2},$$

де S — площа, P — периметр, r — радіус вписаного кола.

Задача 21

Натуральні числа від 2 до 70 пофарбували в 4 кольори. Довести, що знайдуться числа a, b і c одного кольору (можливо, рівні), такі, що $ab-c$ ділиться на 71.

Розв'язання

Нехай k і l не діляться на 71. Тоді існує єдине натуральне число n, менше від 71, таке, що $nl-k$ ділиться на 71. Позначимо це n через $\left\langle \frac{k}{l} \right\rangle$. Ця операція має єдині властивості:

$$\left\langle \frac{x}{y} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{z}{t} \right\rangle - \left\langle \frac{xz}{yt} \right\rangle \vdots 71 \qquad \left\langle \frac{xm}{ym} \right\rangle = \left\langle \frac{x}{y} \right\rangle \qquad (*)$$

(усі розглянуті числа не діляться на 71).

Розглянемо повний граф з 69 вершинами, занумерованими числами від 2 до 70. Ребро (i,j), $(i>j)$ пофарбуємо в той самий колір, що й число $\left\langle \frac{i}{j} \right\rangle$. Таким чином, усі ребра графа пофарбовані в чотири кольори. Тоді аналогічно до задачі Рамсея, в графі існує трикутник, всі ребра якого пофарбовані в один колір. Нехай i, j, k — його вершини $(i>j>k)$. Тоді числа $a=\left\langle \frac{i}{j} \right\rangle$, $b=\left\langle \frac{j}{k} \right\rangle$, $c=\left\langle \frac{i}{k} \right\rangle$ також пофарбовані однаково, і за властивістю (*), $ab-c$ ділиться на 71.

Задача 22

На дошці записані числа 0, 1, $\sqrt{2}$. Дозволяється до будь-якого із цих чисел додати різницю двох інших, помножену на довільне раціональне число. Чи можна за допомогою таких операцій одержати трійку чисел 0, 2, $\sqrt{2}$?

Розв'язання

Помічаємо, що всі числа, які одержуються в процесі виконання дій, мають вигляд $a+b\sqrt{2}$, де a і b — раціональні числа, причому представлення числа в такому вигляді єдине, бо $\sqrt{2}$ — раціональне число. Поставимо відповідно до числа $a+b\sqrt{2}$ точку (a,b) на координатній площині і будемо слідкувати за трикутником, одержаним у такий спосіб із трьох написаних на дошці чисел. Додавання до одного із чисел різниці двох інших, помноженій на раціональне число r, відповідає переносу однієї із вершин трикутника на вектор протилежної сторони, помноженій на r. За такої операції площа трикутника не змінюється.

Числам 0, 1, $\sqrt{2}$ відповідає трикутник з площею $\frac{1}{2}$, а числам 0, 2, $\sqrt{2}$ — трикутник площею 1. Отже, одержати другий набір чисел із першого неможливо.

Задача 23

Чи існує зростаюча послідовність натуральних чисел $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ така, що при всіх натуральних n сума цифр числа b_{n+1}^5 дорівнює числу b_n^5?

Розв'язання

Доведемо, що така послідовність існує. Будемо шукати елементи послідовності серед чисел вигляду $10^k - 1$:

$$(10^k-1)^5 = 10^{5k} - 5\cdot 10^{4k} + 10\cdot 10^{3k} - 10\cdot 10^{2k} + 5\cdot 10^k - 1 =$$

$$= (10^k-5)\cdot 10^{4k} + (10^k-1)\cdot 10^{2k+1} + (5\cdot 10^k - 1) =$$

$$= \overline{\underbrace{99\ldots9}_{k-1}5\underbrace{00\ldots0}_{k-1}\underbrace{99\ldots9}_{k}\underbrace{00\ldots0}_{k}4\underbrace{99\ldots9}_{k}}.$$

Отже, сума цифр числа $(10^k-1)^5$ дорівнює $27k$. Тепер легко можна побудувати шукану послідовність. Нехай, наприклад,

$$b_1 = 9,\ b_{i+1} = 10^{b_i^5/27} - 1,\ i \ge 2.$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Алгебра

Задача 1

Знайти всі пари дійсних чисел (x, y), які задовольняють рівність

$$3\sqrt{x+y}+2\sqrt{8-x}+\sqrt{6-y}=14.$$

Задача 2

Нехай a_1, a_2, ..., a_{100} додатні дійсні числа такі, що $a_k \le k$ для всіх цілих k від 1 до 100. Довести, що

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{100} + (1-a_1)(2-a_2)\ldots(100-a_{100}) < 100!.$$

Задача 3

Нехай $a, b, c \in (0; 1]$ і $x, y, z \ge 1$ такі, що

$$\sqrt{x-a^2}+\sqrt{y-b^2}+\sqrt{z-c^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right).$$

Довести, що $x+y+z \le 6$. За яких умов досягається знак рівності?

Задача 4

Знайти всі монотонно зростаючі функції $f: Z \to Z$, які задовольняють рівність

$$f(x^2+y^2)=(f(x))^2+f(y^2)$$

для всіх $x, y \in Z$.

Задача 5

Знайти всі трійки дійсних чисел (a, b, c), такі, що

$$a^3+b^3+c^3=24 \text{ і } (a+b)(b+c)(c+a)=64.$$

Задача 6

Нехай a, b, c, d дійсні числа і $a \neq 0$. Довести, що $|ax+b| \le |cx+d|$ для всіх дійсних x тоді і тільки тоді, коли $ad = bc$ і $|c| \ge |a|$.

Задача 7

Нехай a, b, c дійсні додатні числа такі, що $a+b+c \ge \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$. Довести, що $\frac{a^3c}{b(c+a)}+\frac{b^3a}{c(a+b)}+\frac{c^3b}{a(b+c)} \ge \frac{3}{2}$.

Задача 8

Нехай a, b, c дійсні додатні числа, такі, що $abc = 1$. Довести, що

$$\frac{a}{b^2(c+1)}+\frac{b}{c^2(a+1)}+\frac{c}{a^2(b+1)} \ge \frac{3}{2}.$$

Задача 9

Нехай a, b, c дійсні додатні числа, такі, що $a+b+c = 1$. Довести, що

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}} \ge \frac{3}{2}.$$

Задача 10

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — два набори дійсних чисел такі, що $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$ і $\sum_{k=1}^{n} |x_k| = 2$. Довести, що

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \le \frac{3}{2}\max_k y_k - \frac{1}{2}\min_k y_k.$$

Задача 11

Нехай a, b, c дійсні додатні числа, такі, що $2abc+ab+bc+ca = 1$. Довести, що $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \ge \frac{3}{2}$.

Задача 12

Нехай $a_0 > 0$, $b_0 > 0$ і $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2b_n}$, $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2a_n}$ для всіх цілих $n \ge 0$. Довести, що

$$\max\{a_{2004}, b_{2004}\} \ge \sqrt{2005}.$$

Задача 13

Нехай a, b, c, d додатні дійсні числа, такі, що $a > b + c + d$. Довести, що

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) \ge 20abcd.$$

Задача 14

Нехай a, b, c додатні дійсні числа. Довести, що

$$\frac{a^6+b^6}{a+b} + \frac{b^6+c^6}{b+c} + \frac{c^6+a^6}{c+a} \ge 3a^2b^2c^2.$$

Задача 15

Нехай $n \ge 2$ натуральне число. Знайти всі цілі числа $k \ge 2$, такі, що

$$\left[\sqrt[k]{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}\right] = n - k + 1.$$

Задача 16

Нехай n натуральне число. Розв'язати рівняння

$$\log_2^n(2x^2+2) + \log_{x^2+1}^n(2x^2+2) = 8.$$

Задача 17

Нехай $a > 1$, $b > 1$ задані дійсні числа. Розв'язати рівняння

$$a^{bx} + b^{a/x} = a^b + b^a.$$

Задача 18

Знайти всі дійсні числа x такі, що

$$(-3)^{[\log_4 x]} + x^{[\log_4 x]} = 1.$$

Задача 19

Нехай a, b, c — натуральні числа, які не перевищують $1\,000\,000$. Довести, що рівняння

$$\sqrt[21]{ax^2} + \sqrt[21]{bx} + \sqrt[21]{c} = 0$$

не має дійсних коренів.

Задача 20

Додатні числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$, такі, що

$$x_i \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1}$$

для $i = 2, 3, \ldots, n$.

Довести нерівність

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} \leq \frac{n}{2}.$$

Геометрія

Задача 1

В опуклому чотирикутнику $ABCD$ виконуються такі рівності $\angle B = \angle C$ і $CD = 2AB$. На стороні BC позначили таку точку X, що $\angle BAX = \angle CDA$. Довести, що $AX = AD$.

Задача 2

В опуклому шестикутнику $ABCDEF$ діагоналі AD, BE і CF рівні між собою. Нехай P — точка перетину діагоналей AD і CF, R — точка перетину діагоналей BE і CF, Q — точка перетину діагоналей AD і BE. Відомо, що $AP = PF$, $BR = CR$ і $DQ = EQ$. Довести, що точки A, B, C, D, E, F лежать на одному колі.

Задача 3

AD — діаметр кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$. Точка E симетрична точці A відносно середини сторони BC. Довести, що $DE \perp BC$.

Задача 4

У трикутнику ABC з кутом B, що дорівнює $60°$, проведена бісектриса CL. Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC. Описане коло трикутника ALI перетинає сторону AC в точці D. Довести, що точки B, L, D і C лежать на одному колі.

Задача 5

Дано трикутник ABC. На сторонах AB, AC і BC вибрані точки D, E і F відповідно так, що $BF = 2CF$, $CE = 2AE$ і $\angle DEF = 90°$. Довести, що $\angle ADE = \angle EDF$.

Задача 6

У трикутнику ABC провели бісектрису CK, а в трикутнику BCK — бісектрису KL. Прямі AC і KL перетнулися в точці M. Відомо, що $\angle BAC > \angle BCA$. Довести, що $AK + KC > AM$.

Задача 7

Дано два кола ω_1 і ω_2, які не перетинаються, і дві їх спільні зовнішні дотичні l_1 і l_2. На l_1 між точками дотику позначили точку A, а на l_2 — точки B і C так, щоб прямі AB і AC були дотичними до ω_1 і ω_2. Нехай O_1 і O_2 — центри кіл ω_1 і ω_2, а K — точка дотику зовні вписаного кола трикутника ABC зі стороною BC. Довести, що середина відрізка O_1O_2 рівновіддалена від точок A і K.

Задача 8

Коло, яке проходить через вершини B і C прямокутного трикутника ABC, перетинає гіпотенузу AC в точці X. Дотичні до цього кола, проведені в точках X і B, перетинаються в точці Y. Довести, що точка Y лежить на середній лінії трикутника ABC, паралельній до сторони BC, або на її продовженні.

Задача 9

AE і CD — висоти гострокутного трикутника ABC. Бісектриса кута B перетинає відрізок DE в точці F. На відрізках AE і CD позначили такі точки P і Q відповідно, що чотирикутники $ADFQ$ і $CEFP$ — вписані. Довести, що $AP = CQ$.

Задача 10

Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає вписане в цей трикутник коло в точках F і L. Точка D — основа перпендикуляра, опущеного з точки C на цю бісектрису. K — основа перпендикуляра, опущеного з центра вписаного кола на BD. Довести, що точки F, L, B і K лежать на одному колі.

Задача 11

Коло, яке проходить через вершини A і B трикутника ABC, перетинає сторони AC і BC в точках X і Y відповідно. З'ясувалося, що центр зовні вписаного кола трикутника CXY, яке дотикається сторони XY, лежить на описаному колі трикутника ABC. Довести, що центр вписаного кола трикутника ABC лежить на відрізку XY.

Задача 12

Нехай BL — бісектриса трикутника ABC. Всередині трикутника BLC знайшлася така точка P, що $\angle BCP = 90°$ і $\angle LPC + \angle LBC = 180°$. Точка O — центр кола, описаного навколо трикутника LPB. Довести, що прямі CO, BL і AM, де M — середина сторони BC, перетинаються в одній точці.

Задача 13

Висоти AA_1 і BB_1 гострокутного трикутника перетинаються в точці H. На стороні AC знайшлася така точка L, що відрізок A_1L ділиться навпіл висотою CC_1, а відрізок C_1L ділиться навпіл висотою AA_1. Довести, що $HL \perp OH$, де O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC.

Задача 14

Всередині трикутника ABC вибрана довільна точка X. Промені AX, BX, CX перетинають коло, описане навколо трикутника ABC, у точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Точка A_2 симетрична точці A_1 відносно середини сторони BC. Аналогічно визначаються точки B_2 і C_2. Розглянемо трикутники $A_2B_2C_2$, одержані для всіх таких точок X. Довести, що всі кола, описані навколо цих трикутників, проходять через фіксовану точку Y, яка не залежить від вибору точки X.

Задача 15

На діагоналях AC і BD вписаного чотирикутника $ABCD$ позначені точки M і N відповідно так, що

$$\frac{BN}{DN} = \frac{AM}{CM} \text{ і } \angle BAD = \angle BMC.$$

Довести, що $\angle ANB = \angle ADC$.

Задача 16

На стороні AC трикутника ABC знайшлася така точка K що $AK = 2KC$ і $\angle ABK = 2\angle KBC$. Нехай F — середина сторони AC, а L — проекція A на BK. Довести, що $FL \perp BC$.

Задача 17

На сторонах AB і BC гострокутного трикутника ABC побудовані як на основах рівнобедрені трикутники AFB і BLC, причому один із них лежить всередині трикутника ABC, а другий — зовні. При цьому $\angle AFB = \angle BLC$ і $\angle CAF = \angle ACL$. Довести, що пряма FL відтинає від кута ABC рівнобедрений трикутник.

Задача 18

На меншій дузі AC описаного кола гострокутного трикутника ABC позначили точку D. На стороні AC знайшлася така точка E, що $DE = AE$. На прямій, паралельній до AB, що проходить через E, позначена точка F така, що $CF = BF$. Довести, що точки D, E, C, F лежать на одному колі.

Задача 19

$ABCD$ — опуклий чотирикутник, K і L — середини діагоналей AC і BD відповідно. Пряма KL перетинає сторони AD і BC в точках X і Y відповідно. Описане коло навколо трикутника AKX перетинає сторону AB в точці M. Довести, що описане коло навколо трикутника BLY також перетинає сторону AB в цій точці.

Задача 20

В опуклому чотирикутнику $ABCD$ точки P і Q — середини діагоналей AC і BD. Пряма PQ перетинає сторони AB і CD в точках M і N відповідно. Довести, що кола, описані навколо трикутників ANP, BNQ, CMP, DMQ, перетинаються в одній точці.

Комбінаторика

Задача 1

По колу розташовані деяка кількість чорних і така ж кількість білих фішок. Нехай a — кількість таких трійок фішок, які стоять поруч і в яких перевищує білий колір, а b — кількість таких трійок, які стоять поруч і в яких перевищує чорний колір. Довести, що $a \leq 3b$.

Задача 2

Розглядаються всі послідовності натуральних чисел (a_n) довжиною 2004, які мають таку властивість: $a_1 = 1$, $a_{n+1} \le 1 + a_n$. Довести, що кількість таких послідовностей з парною сумою членів дорівнює кількості таких послідовностей з непарною сумою членів.

Задача 3

У групі кожний має знайомого. Довести, що цю групу можна розбити на дві групи так, щоб кожен мав знайомого із другої групи.

Задача 4

Колоду із 36 карт роздали на шістьох осіб так, що у будь-яких двох є дві масті, порівну карт. Довести, що в одного з них є чотири карти однакової масті.

Задача 5

У державі 2004 міст. Деякі пари міст з'єднані дорогами так, щоб із будь-якого міста можна було б проїхати у будь-яке інше. Довести, що цю державу можна розбити на декілька республік (можливо, всього на одну) так, щоб у кожній республіці із будь-якого міста можна було єдиним чином проїхати в будь-яке інше місто цієї республіки, не виїжджаючи за її межі. (У кожній республіці повинно бути не менш ніж два міста.)

Задача 6

Довести, що у будь-якій компанії, що складається з парної кількості людей, знайдуться дві особи, в яких у цій компанії парна кількість спільних знайомих.

Задача 7

На краю дошки 2005×2005 позначили дві клітинки A і B, розділені непарним числом клітинок. Довести, що кількість способів покрити доміношками 1×2 усю дошку без клітинки A дорівнює кількості способів покрити доміношками дошку без клітинки B.

Задача 8

У лівій нижній клітинці дошки $n \times n$ стоїть кульгавий король, який може ходити тільки в трьох напрямках: вправо, вгору і по діагоналі вправо-вгору. Нехай A_n — кількість усіх його маршрутів, які ведуть у протилежну клітинку дошки, а A_n^* — кількість таких маршрутів, що не заходять у лівий стовпчик і верхній рядок (крім початкової і кінцевої позиції). Довести, що $A_n^* = 2A_{n-1}$.

Задача 9

У країні 100 міст, з яких деякі з'єднані дорогами так, щоб із кожного міста можна було доїхати до будь-якого іншого. При цьому всього в державі 1000 доріг. Уряд хоче закрити деякі дороги (можливо, всі) так, щоб із кожного міста виходило парне число доріг можливо, жодної). Скількома способами він може це зробити?

Задача 10

Натуральні числа від 2 до 70 пофарбовані в чотири кольори. Довести, що знайдуться три числа a, b і c одного кольору (можливо, однакові), такі, що число $ab-c$ ділиться на 71.

Задача 11

Нехай A —множина наборів $\{a_n\}_{n=1}^{2004}$ натуральних чисел, які задовольняють умови:

$$a_1 = 1,\ a_{k+1} \le a_k + 1, (k = 1, 2, \ldots, 2003);$$

B — множина наборів $\{b_n\}_{n=1}^{2004}$ натуральних чисел, які задовольняють умови:

$$b_1 = 1, b_k \le b_{k+1} \le k + 1, (k = 1,\ 2, \ldots,\ 2003).$$

Довести, що у множинах A і B порівну елементів.

Задача 12

Прямокутник у клітинку зі сторонами, більшими від однієї клітинки розбитий на доміношки (прямокутники 1×2). Нехай a — кількість квадратів 2×2, які складаються з двох доміношок, а b — кількість квадратів 2×2, які складаються із клітинок чотирьох різних доміношок. Довести, що $a > b$.

Задача 13

Дводольний граф з $v \ge 4$ вершинами без кратних ребер зображений на площині так, що кожне ребро перетинається не більше, ніж з одним іншим. Довести, що в цьому графі не більше ніж $3v-8$ ребер. (Граф називається дводольним якщо всі його вершини можна пофарбувати у два кольори так, що вершини одного кольору не з'єднані жодним ребром.)

Задача 14

У країні 2005 міст. Деякі міста з'єднані дорогами з одностороннім рухом. Відомо, що для будь-яких двох міст із одного з них можна дістатися до іншого, не порушуючи правил дорожнього руху (тобто для міст A і B можна проїхати або із A в B, або із B в A). Президент країни хоче послати в деякі міста своїх представників так, щоб у будь-яке місто, де немає його представника, можна було б прямо попасти з міста, де є його представник. Довести, що для цього йому буде достатньо 1003 представники.

Задача 15

У країні 210 міст і зовсім немає доріг. Король цієї країни хоче збудувати декілька доріг з одностороннім рухом так, щоб для будь-яких трьох міст A, B і C,таких, що є дороги, які мають напрям із A в B та із B в C, немає дороги з напрямом із A в C. Яку найбільшу кількість доріг він зможе побудувати?

Задача 16

У компанії із ста осіб серед будь-яких десяти є троє попарно знайомих. Довести, що можна вибрати вісьмох із них так, щоб будь-який, що залишився, був знайомий з кимось із цих восьми.

Задача 17

У компанії як мінімум 10 осіб. Серед будь-яких 10 із них є троє попарно знайомих. Довести, що знайдуться або 7 таких осіб, які зовсім не мають знайомих, або такі 7 осіб, що кожний, який залишився, був знайомий з кимось із цих семи.

Задача 18

Скільки існує 10-цифрових чисел, які діляться на 66667 і записуються тільки цифрами 3, 4, 5 і 6?

Задача 19

Довести, що число способів розрізати прямокутник 998×999 на куточки, які складаються із трьох клітинок, не перевищує числа способів розрізати прямокутник 1998×2000 на вказані куточки так, що жодні два куточки не утворювали прямокутника 2×3.

Задача 20

Граф має $2n$ вершин, причому всі вони мають степінь 3. Довести, що можна так вибрати n ребер, що правильне фарбування в 3 кольори вибраних ребер однозначно б задавало правильне фарбування в три кольори всіх ребер графа. (Фарбування називають правильним, якщо ребра, що мають спільну вершину, пофарбовані в різний колір.)

Теорія чисел

Задача 1

Натуральні числа a, b, x та y такі, що $ax+by$ ділиться на a^2+b^2. Довести, що числа x^2+y^2 та a^2+b^2 мають спільний дільник, більший від 1.

Задача 2

Натуральні числа x та y, більші від 1, такі, що x^2+y^2-1 ділиться на $x+y-1$. Довести, що $x+y-1$ — складене число.

Задача 3

Довести, що для будь-яких цілих a і b різної парності знайдеться таке ціле число c, що числа $c+ab$, $c+a$, $c+b$ — квадрати цілих чисел.

Задача 4

Позначимо через $p(n,k)$ кількість дільників натурального числа n, не менших, ніж k. Обчислити значення суми

$$p(1001,\ 1)+p(1002,\ 2)+p(1003,\ 3)+\ldots+p(2000,\ 1000).$$

Задача 5

a, b, c — натуральні числа, причому $(a-b)$ — просте число і $3c^2=c(a+b)+ab$. Довести, що $8c+1$ — квадрат цілого числа.

Задача 6

p і q — прості числа, такі, що p^2+1 ділиться на q, а q^2-1 ділиться на p. Довести, що $p+q+1$ — складене число.

Задача 7

$d_1, d_2, \ldots, d_k$ — усі можливі дільники деякого натурального числа n, виписані в порядку зростання ($d_1=1$, а $d_k=n$). З'ясувалося, що d_2-d_1, d_3-d_2, d_4-d_3, ..., d_k-d_{k-1} — також усі можливі дільники деякого натурального числа (не обов'язково в порядку зростання). Зайти усі n, для яких це може бути.

Задача 8

Цілі числа a, b і c такі, що

$$c^2-a^2-b^2=2(a-b)(c-a+b).$$

Довести, що число $2ab$ — квадрат цілого числа.

Задача 9

Нехай n — натуральне число, більше за 1. Відомо, що воно взаємно просте з числом 10. Довести, що існує $(n-2)$-цифрове число із одиниць і трійок, яке ділиться на n.

Задача 10

Натуральні числа n, m, k такі, що числа 5^n-2 і 2^k-5 діляться на 5^m-2^m. Довести, що n і m — взаємно прості.

Задача 11

Знайти всі четвірки натуральних чисел k, l, m, n, такі, що

$$(2^k+2^l)^2=2^m+2^n.$$

Задача 12

Довести, що рівняння

$$x^3+y^3+1=z^3$$

має безліч натуральних розв'язків.

Задача 13

Розв'язати рівняння в натуральних числах

$$105^x + 211^y = 106^z.$$

Задача 14

Розв'язати рівняння в натуральних числах

$$x^{2^x} = y^{512^y}.$$

Задача 15

Розв'язати рівняння в простих числах

$$p^2 - p + 1 = q^3.$$

Задача 16

Розв'язати рівняння в цілих числах

$$x^2 + xy + y^2 = 15z^2.$$

Задача 17

Розв'язати рівняння

$$a^{b^{c^d}} = d^{c^{b^a}}$$

в натуральних числах, більших за 1.

Задача 18

Знайти всі пари взаємно простих натуральних чисел, які задовольняють рівняння

$$x^3 - x = 2\left(y^3 - y\right).$$

Задача 19

Довести, що рівняння

$$x^2 + y^2 + 1 = 3^z$$

має безліч розв'язків в натуральних числах.

Задача 20

Розв'язати рівняння в цілих числах

$$3^x = 2^x y + 1.$$

Конструкції

Задача 1

На площині задано декілька рівних паралельно розташованих квадратів, причому серед будь-яких n із них можна вибрати чотири, які мають спільну точку. Довести, що цю множину квадратів можна розбити на не більше ніж $n-3$ підмножин, у кожній із яких усі квадрати мають спільну точку.

Задача 2

Множина M складається із n точок площини, жодні три із яких не лежать на одній прямій. Для кожного трикутника з вершинами із M підрахували кількість точок з M, які лежать всередині його. Довести, що середнє арифметичне всіх знайдених чисел не перевищує $n/4$.

Задача 3

Нехай $\{A_n\}_{n\in N}$ — набір скінченних множин. Позначимо через $|A|$ кількість елементів скінченної множини A. Відомо, що $|A_i| \geq i^3$ і при цьому

$$|A_i \cap A_j| \leq 2\min\{i, j\} \text{ для } i \neq j.$$

Довести, що існує така множина B, що $|B \cap A_i| = i$ для всіх $i \in N$.

Задача 4

З множини, яка утворена з n елементів, вибрали $n+1$ підмножин, кожне із яких містить непарну кількість елементів. Довести, що перетин якихось двох із них також містить непарну кількість елементів.

Задача 5

З множини, яка утворена з n елементів, вибрали 100 підмножин. Усі вони парні (тобто містять парну кількість елементів), їх усі можливі перетини по 2, по 3, ..., по 99 множин також парні, а перетин усіх 100 підмножин непарний. При якому найменшому n це можливо?

Задача 6

M — деяка множина простих чисел, в якій більш ніж один елемента. Відомо, що для будь-якої (скінченної) підмножини $N \subset M$ число

$\left(\prod_{k\in N} k\right)-1$ має прості дільники лише з множини M. Довести, що M співпадає з множиною всіх простих чисел.

Задача 7

Розглянемо всі можливі набори, які складаються з трьох різних натуральних чисел від 1 до $p-1$, де p — просте число. Для кожного такого набору розглянемо остачу від ділення добутку його чисел на p. Довести, що серед одержаних остач одиниць не менше, ніж двійок.

Задача 8

Тасуванням колоди із n карт називатимемо таку дію: колода ділиться на деяку (довільну) кількість частин, які без зміни положення карт всередині них перекладаються у зворотному порядку. Довести, що колоду із 1000 карт можна перевести із будь-якого положення у будь-яке інше не більше ніж за 56 тасувань.

Задача 9

Чи можна розбити множину чисел $M=\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ на три групи A, B, C так, щоб $A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$, $C\cap A=\varnothing$ і $A\cup B\cup C=M$, а також у групі A сума чисел ділилась на 102, у групі B — на 203 а в групі C — на 304?

Задача 10

Розглянемо всі можливі набори чисел із множини $M=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, де n — натуральне число, $n>3$, які не містять двох сусідніх чисел. Довести, що сума квадратів добутків чисел цих наборів дорівнює $(n+1)!-1$.

Задача 11

Чи можна множину $M=\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ розбити на декілька груп так, щоб у кожній групі знайшлося число, яке дорівнює третині семи інших чисел цієї групи?

Задача 12

Чи можна розташувати по колу числа від 1 до 25 так, щоб сума будь-яких п'яти чисел, які йдуть підряд, при діленні на 5 давала остачу 1 або 4?

Задача 13

У вершинах правильного n-кутника розташовані числа: $n-1$ нулів і одна одиниця. Дозволяється збільшити на 1 всі числа у вершинах правильного k-кутника, вписаного в даний многокутник. Чи можна такими діями зробити всі числа рівними?

Задача 14

Нехай n — довільне натуральне число, і на дошці виписані всі натуральні числа від n до $3n-1$. Дозволяється стерти з дошки будь-які два числа a та b $(a \leq b)$ і записати замість них число $\frac{a}{2}$. Довести, що коли після серії таких операцій на дошці залишиться лише одне число, то воно буде менше від 1.

Задача 15

У клітинках таблиці 2005×2005 розташовані плюси і мінуси. Дозволяється вибрати 2005 клітинок, жодні дві із яких не лежать у одному рядку або в одному стовпчику, і поміняти знаки у вибраних клітинках на протилежні. Довести, що за допомогою таких дій можна домогтися того, щоб у таблиці залишилось не більш ніж 2004 плюси.

Задача 16

На дошці $n \times n$ сидять $n-1$ жуків так, що жодні два із них не знаходяться в сусідніх (по стороні) клітинках. Довести, що один із них може переповзти на сусідню клітинку так, щоб ця умова збереглася.

Задача 17

Чи існує така множина A, яка складається із натуральних чисел, щоб будь-яке натуральне число, яке їй не належить, було середнім арифметичним двох різних чисел, що їй належать, а жодне число із A не має цієї властивості.

Задача 18

Фішка може знаходитися в одній із 169 точок $(x; y)$, де x і y — цілі числа, $0 \leq x \leq 12$, $0 \leq y \leq 12$. Фішка може піти із точки $(x_1; y_1)$ в точку $(x_2; y_2)$, тільки якщо кожне із чисел $|x_1 - x_2|, |x_1 - y_2|, |y_1 - x_2|, |y_1 - y_2|$

не менш ніж два і не більше ніж дев'ять. Довести, що фішка не зможе обійти всі 169 точок, побувавши в кожній з них рівно один раз.

Задача 19

Нескінченний аркуш паперу покритий шаром доміношок 1×2, сторони яких йдуть по лініях сітки. Довести, що його можна покрити ще трьома шарами доміношок аналогічним чином так, щоб жодна плитка не лежала точно над якоюсь іншою.

Задача 20

В одній із вершин правильного n-кутника записана одиниця, а в інших — нулі. Бешкетник Петро одночасно додав до числа в кожній вершині його сусіда за годинниковою стрілкою; потім він додав до числа в кожній вершині число, яке стоїть від нього через одну вершину за годинниковою стрілкою; потім він додав до числа в кожній вершині число, яке стоїть від нього через дві вершини за годинниковою стрілкою, і т. д; нарешті він додав до числа в кожній вершині його сусіда проти руху годинникової стрілки. Після цих операцій $n-1$ із записаних чисел стали рівними. Знайти всі такі значення n.

ДОПОМІЖНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

У цьому додатку зібрані найбільш важливі для розв'язання олімпіадних задач з математики поняття і факти, які не виходять за межі шкільного курсу математики з поглибленим її вивченням. Їх доведень тут не наводимо, але зацікавлений читач зможе знайти їх у тих книгах, які перелічені в списку літератури, або дізнатися у своїх тренерів, що готують його до олімпіади. Не виняток, що доведення деяких тверджень міститься в розв'язаннях задач, які є в нашому посібнику. У кінці додатку дається перелік позначень, які зустрічаються в олімпіадній математиці.

Означення 1

Множина A називається *підмножиною* множини B (позначають $A \subset B$), якщо кожний елемент множини A належить множині B.

Означення 2

Об'єднанням $A \cup B$ множин A і B називається множина, яка складається зі всіх елементів, які належать принаймні одній із множин A і B.

Перетином $A \cap B$ множин A і B називається множина, яка складається зі всіх елементів, які належать як множині A, так і множині B.

Аналогічно означаються об'єднання і перетин декількох множин.

Означення 3

Різницею $A \setminus B$ множин A і B називається підмножина множини A, яка складається зі всіх елементів, які не належать множині B.

Якщо $B \subset A$, то різниця $A \setminus B$ називається *доповненням* до множини B у множині A.

Набори, які складаються з таких самих елементів, але відрізняються їх розміщенням, являють собою одну й ту саму множину (наприклад, $\{1; 2; 3\}=\{2; 3; 1\}$). Якщо виникає необхідність не перемішувати також набори, які відрізняються тільки розміщенням елементів в них, то в цьому випадку набори називають впорядкованими.

Означення 4

Декартовим добутком $A \times B$ множин А і В називається множина всіх впорядкованих пар $(x; y)$, де $x \in A$ і $y \in B$.

Аналогічно означається декартовий добуток декількох множин.

Теорема 1 (принцип Діріхле)

Якщо множина, яка має n елементів, подана у вигляді об'єднання k підмножин, то хоча б одна з цих підмножин має не менше ніж $\frac{n}{k}$ елементів.

Ця теорема зазвичай використовується в ситуації, коли $k < n$, а підмножини попарно не перетинаються.

Теорема 2 (принцип математичної індукції)

Нехай для деякого твердження $U(n)$, яке залежить від параметра n, справедливе наступне:

а) твердження $U(1)$ істинне;

б) якщо при деякому значенні $n \in N$ твердження $U(1),\ldots,U(n)$ істинні, то твердження $U(n+1)$ також істинне.

Тоді твердження $U(n)$ істинне для будь-якого значення $n \in N$.

Через $f\colon A \to B$ позначається функція з областю визначення A та областю значень B.

Означення 5

Нехай задана функція $f\colon A \to B$. Функція $g\colon B \to A$ називається *оберненою* до функції f (позначення: $g = f^{-1}$), якщо справедливі рівності:

$$g(f(x)) \equiv x,\ f(g(y)) \equiv y,\ x \in A,\ y \in B.$$

Теорема 3

Функція $f\colon A \to B$ має обернену функцію тоді й тільки тоді, коли для будь-якого елемента $y \in B$ існує елемент $x \in A$, який задовольняє умову $f(x) = y$, і для будь-яких двох елементів $x_1, x_2 \in A$ значення $f(x_1)$ і $f(x_2)$ різні.

Означення 6

Суперпозицією двох функцій $f\colon A \to B$ і $g\colon B \to C$ називається функція $h\colon A \to C$, яка визначається рівністю

$$h(x) \equiv g(f(x)),\ x \in A.$$

Аналогічно означається суперпозиція декількох функцій:

$$f_1 : A_1 \to A_2, f_2 : A_2 \to A_3, \ldots, f_n : A_n \to A_{n+1}.$$

Суперпозиція n функцій, які співпадають $f : A \to A$ позначається через f^n. Якщо задана функція $f : R \to R$, то суперпозицію

$$f^n(x) = f(f(f(\ldots(x)\ldots)))$$

або обернену функцію $f^{-1}(x)$ не слід змішувати з функцією, значення якої в кожній точці x дорівнює $(f(x))^n$ або $(f(x))^{-1}$ відповідно. Виняток складають логарифмічна і тригонометрична функції (наприклад, вираз $\sin^2 x$ дорівнює $\sin x \cdot \sin x$, а не $\sin(\sin(x))$).

Означення 7

Функція $f : A \to R$ називається:

- *обмеженою зверху*, якщо існує число $M \in R$ таке, що $f(x) < M$ при всіх $x \in A$;
- *обмеженою знизу*, якщо існує число $m \in R$ таке, що $f(x) > m$ при всіх $x \in A$.

Функція $f : A \to R$, яка обмежена одночасно як зверху так і знизу, називається *обмеженою*.

Означення 8

Нехай $A \subset R$. Функція $f : A \to R$ називається: зростаючою, якщо $f(x_1) < f(x_2)$; спадною, якщо $f(x_1) > f(x_2)$; незростаючою, якщо $f(x_1) \geq f(x_2)$; неспадною, якщо $f(x_1) \leq f(x_2)$, де кожна з умов виконується для будь-яких чисел $x_1, x_2 \in A$, які задовольняють нерівність $x_1 < x_2$. Функція $f : A \to R$, яка має одну із чотирьох властивостей, називається *монотонною*. Функція, яка є або зростаючою, або спадною, називається *строго монотонною*.

Частинним випадком функцій $f : A \to R$, область визначення яких є підмножина множини R, є числові послідовності, тобто відображення $a : N \to R$ або $a : Z^+ \to R$, значення яких позначаються через a_n. Відповідно до означень 7 та 8 говорять про обмежену зверху або знизу, обмежених, зростаючих, незростаючих, спадних, неспадних, монотонних і строго монотонних послідовностях.

Теорема 4

Для будь-яких значень $a, b \in R$ і $n \in N$ справедливі рівності:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n\right),$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}\right),$$

$$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)\left(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \ldots + ab^{2n-2} - b^{2n-1}\right),$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \text{ при } a \geq \sqrt{b},\ b > 0.$$

Теорема 5 (нерівність Бернуллі)

Для будь-яких значень $a, b \in R$, які задовольняють умови $a > -1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b \neq 1$, справедливі нерівності $(1+a)^b < 1 + ab$, якщо $0 < b < 1$; $(1+a)^b > 1 + ab$, якщо $b \notin [0;\ 1]$.

Означення 9

Середнім арифметичним чисел $a_1, \ldots, a_n \in R$ називається число

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Середнім геометричним невід'ємних чисел $a_1, \ldots, a_n$ називається число

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}.$$

Середнім гармонійним додатних чисел $a_1, \ldots, a_n$ називається число

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Середнім квадратичним чисел $a_1, \ldots, a_n \in R$ називається число

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Теорема 6 (теорема про середні)

Будь-які додатні числа $a_1, \ldots, a_n$ задовольняють нерівності

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1\ldots a_n} \le \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}},$$

причому, якщо серед цих чисел є хоча б два різних числа, то всі нерівності строгі.

Найширше застосування знайшла нерівність між середнім геометричним та середнім арифметичним, яка правильна також і для невід'ємних чисел.

Теорема 7

Послідовність чисел $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in N)$ є зростаючою та має границю, яка позначається через e та задовольняє нерівність $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$, для будь-якого значення $n \in N$.

Логарифм з основою e називається натуральним і позначається через $\ln\left(\log_e x = \ln x,\ x > 0\right)$.

Означення 10

Функція

$$sign(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x > 0, \\ 0, \text{ якщо } x = 0, \\ -1, \text{ якщо } x < 0 \end{cases}$$

називається *функцією знака.*

Означення 11

Цілою частиною $[x]$ числа $x \in R$ називається найбільше ціле значення, яке не перевищує число x. *Дробовою частиною* числа $x \in R$ називається число $x = x - [x]$.

Теорема 8

Ціла частина є неспадною функцією, а дробова її частина – періодичною функцією з періодом, який дорівнює 1.

Означення 12

Нехай дані числа $a, b \in Z$, причому $b \neq 0$. Тоді числа $q \in Z$ і $r \in \{0, 1, \ldots, |b|-1\}$ називаються відповідно дільником та часткою від ділення числа a на число b, якщо виконується рівність $a = qb + r$. При цьому, що $r = 0$, то кажуть, що число a ділиться на b, або що a кратне числу b, або що число b є дільником числа a (позначається $a \vdots b$).

Означення 13

Найменшим спільним кратним ненульових чисел $a_1, \ldots, a_n \in Z$ називається найменше натуральне число, яке ділиться на кожне з цих чисел (позначається $[a_1, \ldots, a_n]$).

Означення 14

Найбільшим спільним дільником чисел $a_1, \ldots, a_n \in Z$, з яких хоча б одне відмінне від нуля, називається найбільше натуральне число, на яке ділиться кожне з цих чисел (позначається $(a_1, \ldots, a_n)$).

Теорема 9

Для будь-яких двох натуральних чисел a і b має місце рівність $(a, b) \cdot [a, b] = ab$.

Означення 15

Числа $a, b \in Z$ називаються *взаємно простими,* якщо $(a, b) = 1$.

Означення 16

Нехай дано числа $a, b, c \in Z$, причому $c \neq 0$. Кажуть, що число a конгруентне числу b за модулем c (позначається $a \equiv b (\bmod c)$), якщо $(a - b) \vdots c$.

В іншому випадку говорять, що число a не конгруєнтне числу b за модулем c (позначається $a \not\equiv b(\bmod c)$).

Теорема 10

Нехай дано числа $a, b, c, d, m, k \in Z$, причому $m \neq 0$, $k \neq 0$. Тоді справедливі такі твердження:

а) якщо $a \equiv b(\bmod m)$ і $b \equiv c(\bmod m)$, то $a \equiv c(\bmod m)$;

б) якщо $a \equiv b(\bmod m)$ і $c \equiv d(\bmod m)$, то $a + c \equiv b + d(\bmod m)$ і $ac \equiv bd(\bmod m)$;

в) якщо $a \equiv b(\bmod m)$, то $a^n \equiv b^n(\bmod m)$ для будь-якого значення $n \in N$;

г) якщо $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$, то $ak \equiv bk(\operatorname{mod} mk)$;

д) якщо $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$ і $a \vdots k$, $b \vdots k$, $m \vdots k$, то $\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k}\left(\operatorname{mod}\frac{m}{k}\right)$.

Теорема 11

Для будь-яких значень $a, b \in Z$ і $n \in N$ мають місце такі твердження:

а) якщо $a \neq b$, то $(a^n - b^n) \vdots (a-b)$;

б) якщо $a \neq -b$, то $(a^{2n-1} + b^{2n-1}) \vdots (a+b)$;

в) якщо $a \neq -b$, то $(a^{2n} - b^{2n}) \vdots (a+b)$.

Ця теорема випливає з теореми 4 або з теореми 10 в).

Нехай m — довільне натуральне число, більше за 2. Різні цілі числа при діленні на m можуть давати будь-яку із остач: 0, 1, ..., $m-1$. Але степені цілих чисел з фіксованим натуральним показником $n>1$ не обов'язково знову даватимуть при діленні на m будь-яку з цих остач.

Теорема 12

При діленні на m $(3 \le m \le 10)$ n-ні степені цілих чисел $(2 \le n \le 5)$ можуть дати ті й тільки ті остачі, які вказані в таблиці.

m \ n	2	3	4	5
3	0; 1	0; 1; 2	0; 1	0; 1; 2
4	0; 1	0; 1; 3	0; 1	0; 1; 3
5	0; 1; 4	0; 1; 2; 3; 4	0; 1	0; 1; 2; 3; 4
6	0; 1; 3; 4	0; 1; 2; 3; 4; 5	0; 1; 3; 4	0; 1; 2; 3; 4; 5
7	0; 1; 2; 4	0; 1; 6	0; 1; 2; 4	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6
8	0; 1; 4	0; 1; 3; 5; 7	0; 1	0; 1; 3; 5; 7
9	0; 1; 4; 7	0; 1; 8	0; 1; 4; 7	0; 1; 2; 4; 5; 7; 8
10	0; 1; 4; 5; 6; 9	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9	0; 1; 5; 6	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

Звичайно числа записуються в десятковій системі числення, яка припускає наступне узагальнення.

Означення 17

Кажуть, що число $n \in N$ має запис $\overline{a_1 \ldots a_m}$ в k-їчній системі числення ($k \in N$, $k > 1$), якщо справедлива рівність

$$n = a_1 k^{m-1} + \ldots + a_{m-1} k^1 + a_m k^0,$$

де $a_1, \ldots, a_m$ — цілі невід'ємні числа, які менші за k, причому $a_1 > 0$.

Теорема 13

Для заданого значення $k \in N$, більшого за 1, будь-яке число $n \in N$ має запис у k-їчній системі числення, причому єдиний.

Теорема 14

Будь-яке натуральне число конгруентне сумі своїх цифр у десятковій системі числення за модулем 9.

Означення 18

Нехай m, $n \in Z$; $n \geq m \geq 0$. *Біноміальним* коефіцієнтом C_n^m називається число $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, де позначено $n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{при } n \in N \\ 1 & \text{при } n = 0. \end{cases}$

Теорема 15

Для будь-яких значень m, $n \in Z^+$, справедливі такі співвідношення

а) $C_n^0 = C_n^n = 1$;

б) $C_n^m = C_n^{n-m}$, якщо $n \geq m \geq 0$;

в) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$, якщо $n > m > 0$.

Теорема 16 (біном Ньютона)

Для будь-яких значень $a, b \in R$ і $n \in N$ справедлива рівність

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

З цієї теореми випливає наступне твердження.

Теорема 17

Усі біноміальні коефіцієнти є натуральними, причому справедливі рівності:

а) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

б) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Означення 19

Натуральне число, яке більше від 1 і не має натуральних дільників, відмінних від 1 і самого себе, називається *простим*. Інші натуральні числа, які більші за 1, називаються *складеними*. Число 1 не є ні простим, ні складеним.

Теорема 18 (основна теорема арифметики)

Кожне складене число розкладається на добуток декількох простих чисел, не обов'язково різних, причому такий розклад єдиний з точністю до порядку співмножників.

Теорема 19 (теорема Евкліда)

Простих чисел нескінченно багато.

Теорема 20

Просте число p входить у розклад числа $n!$ на прості множники в степені $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$ (при достатньо великих значеннях k маємо $\left[\frac{n}{p^k}\right]=0$).

Наступні три теореми описують властивості взаємно простих чисел.

Теорема 21

Нехай $a,b,c \in Z$ і $c \neq 0$. Якщо $ab \vdots c$ і $(b,c)=1$, то $a \vdots c$.

Теорема 22

Нехай $a,b,c,m \in N$. Якщо $ab=c^m$ і $(a,b)=1$, то $a=a_1^m$ і $b=b_1^m$, де $a_1,b_1 \in N$, причому $(a_1,b_1)=1$ і $a_1b_1=c$.

Теорема 23 (китайська теорема про остачі)

Якщо цілі числа $m_1,\ldots,m_k$ відмінні від нуля і попарно взаємно прості, то для будь-яких цілих чисел $a_1,\ldots,a_k$ існує ціле число x, яке задовольняє умови $x \equiv a_i (\mathrm{mod}\, m_i)$ при всіх $i=1, \ldots, k$. При цьому число x можна вважати числом, яке належить будь-якому наперед заданому напівінтервалу довжиною $m_1m_2\ldots m_k$.

Теорема 24

Для будь-яких двох чисел $a,b \in Z$, з яких хоча б одне відмінне від нуля, існують числа $p,q \in Z$, які задовольняють рівність $pa+qb=(a,b)$.

Теорема 25 (мала теорема Ферма)

Якщо число $a \in Z$ не ділиться на просте число p, то число $a^{p-1}-1$ ділиться на p.

Безпосереднім наслідком малої теореми Ферма є наступна теорема.

Теорема 26

Нехай p — просте число. Тоді для будь-якого значення $a \in Z$ має місце

$$a^p \equiv a(\text{mod}\, p).$$

Теорема 27 (про проміжне значення неперервної функції)

Нехай функція $f:[a;\ b] \to R$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$, причому $A = f(a) < f(b) = B$. Тоді для будь-якого числа $C \in (A; B)$ знайдеться точка $c \in (a;\ b)$, для якої виконується рівність $f(c) = C$.

Теорема 28 (про перетворення в нуль)

Якщо функція $f:[a;\ b] \to R$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і набуває на його кінцях ненульових значень різних знаків, то існує точка $c \in (a;\ b)$, для якої виконується рівність $f(c) = 0$.

Теорема 29

Якщо функція $f:[a;\ b] \to R$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то існують такі числа $c, d \in [a;\ b]$, що для всіх значень $x \in [a;\ b]$ виконуються нерівності $f(c) \le f(x) \le f(d)$.

Теорема 30

Будь-яка неперервна на відрізку функція обмежена.

Нижче через I позначається деякий інтервал числової прямої R.

Розглянемо деяку функцію $f: I \to R$. Припустимо, що ця функція в кожній точці $x \in I$ диференційована, тобто має похідну $f'(x)$. Тоді виникає нова функція $f': I \to R$, значення якої в кожній точці $x \in I$ є число $f'(x)$. Ця функція називається *першою похідною* функції f і може, у свою чергу, також бути диференційованою в кожній точці інтервалу I. Тоді її похідна називається *другою похідною* вихідної функції f. Аналогічно можна визначити n-ну похідну функції f (позначення: $f^{(n)}$) при кожному наступному значенні $n = 3,4,5,\ldots$ Першу, другу і третю похідну функції f звичайно позначають через f', f'' і f''' відповідно.

Означення 20

Функція $f: I \to R$ називається:

- n разів *диференційованою,* якщо $n \in N$ і функція f має n-ну похідну в кожній точці інтервалу I;
- n разів *неперервно диференційованою,* якщо вона n раз диференційована і функція $f^{(n)}$ неперервна на інтервалі I;

- нескінченно диференційованою, якщо вона має n-ну похідну для будь-якого значення $n \in N$.

Теорема 31 (ознака монотонності)

Нехай функція $f: I \to R$ диференційована на інтервалі I. Тоді функція f є неспадною (відповідно незростаючою) тоді й тільки тоді, коли в кожній точці $x \in I$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$ (відповідно $f'(x) \leq 0$). Якщо в кожній точці $x \in I$ виконується нерівність $f'(x) > 0$ (відповідно $f'(x) < 0$), то функція f є зростаючою (відповідно спадною).

Означення 21

Функція $f: I \to R$ називається *опуклою вниз* на інтервалі I, якщо для будь-яких чисел $x, y \in I$ і $\alpha \in [0;\ 1]$ справедлива нерівність

$$f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f\big(y\big).$$

Функція $f: I \to R$ називається *опуклою вгору* на інтервалі I, якщо функція $g(x) = -f(x)$ є опуклою вниз на цьому інтервалі.

Теорема 32 (ознака опуклості)

Нехай функція $f: I \to R$ двічі диференційована на проміжку $[a; b]$. Тоді функція f є опуклою вниз (відповідно вгору) на цьому інтервалі тоді й тільки тоді, якщо в кожній точці $x \in I$ виконується нерівність $f''(x) \geq 0$ (відповідно $f''(x) \leq 0$).

Теорема 33 (теорема Лагранжа)

Нехай функція $f: [a; b] \to R$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційована на інтервалі $(a; b)$. Тоді існує число $c \in (a; b)$, що задовольняє рівність

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорема 34 (теорема Ролля)

Нехай функція $f: [a; b] \to R$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційована на інтервалі $(a; b)$, причому $f(a) = f(b)$. Тоді існує число $c \in \big(a;\ b\big)$, для якого $f'(c) = 0$.

Означення 22

Многочленом (від однієї змінної) називається ціла раціональна функція дійсного або комплексного аргументу x, яку можна подати у вигляді

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

де $n \in Z^+$, a_0, a_1, ..., $a_n \in C$, причому, якщо $n \geq 1$, то $a_n \neq 0$.

Теорема 35

Два многолени $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $Q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ рівні (тобто співпадають як функції) тоді й тільки тоді, коли $n = m$ і $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$.

Означення 23

Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ називаються коефіцієнтами многочлена

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Число a_0 називається вільним членом, а число a_n — старшим коефіцієнтом (або коефіцієнтом при старшому члені) цього многочлена. Якщо $n \geq 1$, то число n називається степенем многочлена $P(x)$ при $a_n \neq 0$ (позначення $\deg P$).

Теорема 36

Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ — довільні многочлени. Тоді:

а) функція $T(x) = P(x) + Q(x)$ також є многочленом, причому $\deg T \leq \max(\deg P, \deg Q)$, а якщо $\deg P \neq \deg Q$, то $\deg T = \max(\deg P, \deg Q)$;

б) функція $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$ також є многочленом, причому, якщо $P(x) \not\equiv 0$ і $Q(x) \not\equiv 0$, то $W(x) \not\equiv 0$ і $\deg W = \deg P + \deg Q$.

Означення 24

Коренем многочлена $P(x)$ називається розв'язок рівняння $P(x) = 0$.

Многочлени, так само як і цілі числа, можна поділити один на один із остачею.

Теорема 37

Нехай дано два довільних многочлени $P(x)$ і $Q(x)$, причому $Q(x) \not\equiv 0$. Тоді існують єдині многочлени $S(x)$ і $R(x)$, що задовольняють дві умови:

а) $P(x) = S(x) Q(x) + R(x)$;

б) $\deg R < \deg Q$ або $R(x) \equiv 0$.

Означення 25

В умовах теореми 37 многочлен $R(x)$ називається *остачею* від ділення многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$. Якщо $R(x) \equiv 0$, то говорять, що многочлен $P(x)$ *ділиться* на многочлен $Q(x)$.

Теорема 38

Якщо коефіцієнти многочлена P і Q в умовах теореми 37 дійсні, то коефіцієнти многочленів S і R також дійсні. Якщо коефіцієнти многочленів P і Q раціональні, то коефіцієнти многочленів S і R також раціональні. Якщо коефіцієнти многочлена Q при старшому члені дорівнюють 1 або -1, то коефіцієнти многочленів S і R — також цілі числа.

Теорема 39 (теорема Безу)

Остача від ділення многочлена $P(x)$ на многочлен $x-x_0$ дорівнює числу $P(x_0)$.

З теореми Безу випливає наступне твердження.

Теорема 40

Многочлен $P(x)$ ділиться на многочлен $x-x_0$ тоді й тільки тоді, коли число x_0 є його коренем.

Означення 26

Число x_0 називається *коренем* многочлена $P(x)$ кратності k $(k \in N)$, якщо многочлен $P(x)$ ділиться на многочлен $(x-x_0)^k$, але не ділиться на многочлен $(x-x_0)^{k+1}$.

Кажуть, що многочлен $P(x)$ має корені $x_1, \ldots, x_n$, якщо кожний з коренів многочлена $P(x)$ повторюється в наборі $(x_1, \ldots, x_n)$ стільки разів, яка його кратність, і ніяке число, відсутнє в наборі, не є коренем.

Теорема 41 (основна теорема алгебри)

Будь-який многочлен степеня $n \geq 1$ має рівно n комплексних коренів.

Як наслідки одержуємо теореми 42–44.

Теорема 42

Якщо значення двох многочленів степеня не вище n співпадають у $n+1$ різних точках, то ці многочлени рівні.

Теорема 43

Будь-який многочлен $P(x)$ степеня $n \geq 0$ єдиним чином (з точністю до перестановки співмножників) можна подати у вигляді

$$P(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

де a_n — старший коефіцієнт многочлена $P(x)$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — його корені.

Теорема 44

Многочлен $P(x)$ ділиться на многочлен $Q(x)\not\equiv 0$ тоді й тільки тоді, коли кожен корінь многочлена $Q(x)$ є коренем многочлена $P(x)$, причому не меншої кратності.

Теорема 45 (теорема Вієта)

Нехай многочлен $P(x)=a_n x^n+\ldots+a_1 x+a_0$ має корені $x_1,\ldots,x_n$. Тоді справедливі рівності:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \ldots \\ x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Правильна й обернена теорема.

Теорема 46

Числа $x_1,\ldots,x_n\in C$, що задовольняє системі з теореми 45, є коренями многочлена $P(x)=a_n x^n+\ldots+a_1 x+a_0$.

Теорема 47

Якщо $P(x)$ — многочлен з дійсними коефіцієнтами і комплексне число z з ненульовою уявною частиною є його коренем, то спряжене комплексне число $\bar{z}$ також є його коренем, причому тієї ж кратності. Зокрема, многочлен $P(x)$ ділиться на многочлен

$$(x-z)^k\cdot(x-\bar{z})^k=\left(x^2-2x\cdot\operatorname{Re}z+|z|^2\right)^k,$$

де k — кратність коренів z і $\bar{z}$.

Як наслідок одержуємо аналог теореми 43 для многочленів з дійсними коефіцієнтами.

Теорема 48

Довільний многочлен $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами степеня n єдиним чином (з точністю до перестановки співмножників) можна подати у вигляді $P(x)=a_n(x-x_n)\ldots(x-x_m)(x^2+2b_1x+c_1)\ldots(x^2+2b_1x+c_1)$, де $m, l\geq 0$, $m+2l=n$, a_n — старший коефіцієнт многочлена $P(x)$, $x_1,\ldots,x_m \in R$ — дійсні корені $P(x)$ з урахуванням їхньої кратності, $b_1,\ldots,b_l,c_1,\ldots,c_l \in R$, причому квадратні тричлени $x^2+2b_1x+c_1$, ..., $x^2+2b_lx+c_l$ не мають дійсних коренів (тобто $b_1^2<c_1$, ..., $b_l^2<c_l$)...

Теорема 49

Якщо раціональне число $\frac{p}{q}$, де $(p,q)=1$, є коренем многочлена $a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ з цілими коефіцієнтами, то $a_0\,\vdots\, p$ і $a_n\,\vdots\, q$.

З цієї теореми випливають наступні твердження.

Теорема 50

Кожен корінь многочлена $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ з цілими коефіцієнтами є або ціле число, або ірраціональне.

Теорема 51

Якщо $a,n\in N$, то число $\sqrt[n]{a}$ є цілим, або ірраціональним.

Теорема 52 (інтерполяційна формула Лагранжа)

Нехай задано різні числа $b_0,b_1,..,b_n\in C$ і довільні значення $c_0,c_1,\ldots,c_n\in C$ $(n\in N_0)$. Тоді існує єдиний многочлен $P(x)$ степеня не вище за n, що задовольняє рівностз $P(b_0)=c_0$, $P(b_1)=c_1$, ..., $P(b_n)=c_n$.

Цей многочлен має такий вигляд: $P(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}c_i\prod\limits_{\substack{0\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{x-b_j}{b_i-b_j}$.

Укажемо зв'язок між коефіцієнтами многочлена і його похідних.

Теорема 53

Нехай даний многочлен $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$.

Тоді $P(0)=a_0$, $P'(0)=a_1$, $P''(0)=2a_2$, ..., $P^{(n)}(0)=n!a_n$ і вихідний многочлен можна записати у вигляді

$$P(x)=\frac{P(0)}{0!}+\frac{P'(0)}{1!}x+\frac{P''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Теорема 54 (нерівність трикутника)

Для будь-яких точок A, B, C справедлива нерівність $AB \le AC + BC$. При цьому рівність має місце тоді й тільки тоді, коли точка C лежить на відрізку AB або всі три точки співпадають.

Теорема 55

Сума кутів кожного n-кутника $(n \ge 3)$ дорівнює $180^\circ(n-2)$.

Означення 27

Нехай A, B, C — три послідовні вершини опуклого многокутника, а D і E — довільні точки на продовженнях сторін AB і BC відповідно за точку B. Тоді кути ABE і CBD (*рис. 1*) називаються *зовнішніми кутами* цього многокутника при вершині B (на відміну від кута ABC, який часто називають внутрішнім кутом многокутника).

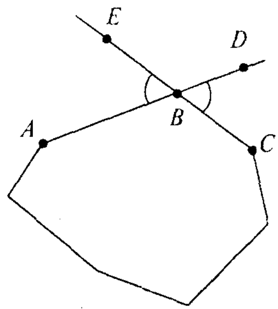


Рис. 1

Теорема 56

Сума зовнішніх кутів опуклого многокутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

Означення 28

Кажуть, що многокутник M *розбитий на многокутники* $M_1, \ldots, M_n$, якщо $M = M_1 \cup \ldots \cup M_n$, причому многокутники M_i і M_j при $i \ne j$ не мають спільних внутрішніх точок.

Означення 29

Многокутник m називається *вписаним у многокутник* M, якщо всі вершини многокутника m лежать на сторонах многокутника M.

Теорема 57

Опуклий чотирикутник $ABCD$ можна вписати в коло тоді й тільки тоді, коли $\angle ABC + \angle CDA = \angle BAD + \angle DCB = 180^\circ$.

Теорема 58

В опуклий чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло тоді й тільки тоді, коли $AB + CD = BC + AD$.

Теорема 59 (теорема Птолемея)

Якщо чотирикутник $ABCD$ можна вписати в коло, то

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

Нехай A і B — дві сусідні вершини многокутника, вписаного в коло. Тоді під дугою AB мають на увазі (якщо не оговорено супротивне) та з двох дуг з кінцями в точках A і B, на якій не лежать інші вершини многокутника.

Теорема 60 (теорема про вписаний кут)

Для будь-якого кута ABC, вписаного в коло, справедлива рівність $\angle ABC = \frac{\breve{AC}}{2}$.

Теорема 61

Нехай діагоналі чотирикутника $A_1A_2B_1B_2$, вписаного в коло, перетинаються в точці P. Тоді (*рис. 2*) справедливі рівності:

а) $\breve{A_1P} \cdot \breve{B_1P} = \breve{A_2P} \cdot \breve{B_2P}$;

б) $\angle A_1PA_2 = \frac{1}{2}\left(\breve{A_1A_2} + \breve{B_1B_2}\right)$.

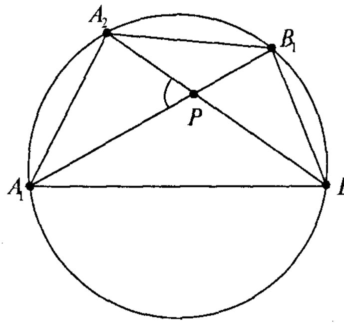


Рис. 2

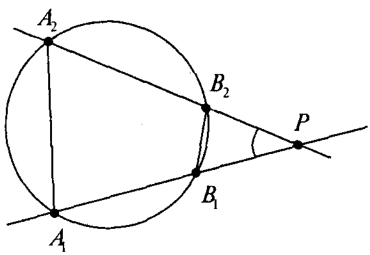


Рис. 3

Теорема 62

Нехай чотирикутник $A_1B_1B_2A_2$ вписаний у коло. Тоді:

1) прямі A_1B_1 і A_2B_2 паралельні тоді й тільки тоді, якщо $\breve{A_1A_2} = \breve{B_1B_2}$;

2) прямі A_1B_1 і A_2B_2 перетинаються в точці P, що лежить у тій же напівплощині відносно прямої A_1A_2, що і відрізок B_1B_2 тоді й тільки тоді, якщо $\breve{A_1A_2} > \breve{B_1B_2}$. При цьому (*рис. 3*) справедливі рівності:

а) $A_1P \cdot B_1P = A_2P \cdot B_2P$;

б) $\angle A_1PA_2 = \frac{1}{2}\left(\breve{A_1A_2} - \breve{B_1B_2}\right)$.

Під довжиною дотичної, проведеної з точки P до кола, мають на увазі відстань від точки P до точки дотику. Для дотичної, яка розглянута в теоремі 62 як граничне положення січної, в якої дві точки перетину з колом зливаються в одну точку дотику, можна одержати наступне твердження.

Теорема 63

Нехай трикутник ABC вписаний у коло, а пряма l дотикається кола в точці C. Тоді:

1) прямі l і AB паралельні в тому й тільки в тому випадку, якщо $\breve{AC} = \breve{BC}$;

2) прямі l і AB перетинаються в точці P, що лежить у тій же напівплощині відносно прямої AC, що й точка B, у тому й тільки в тому випадку, якщо $AC > BC$. При цьому (*рис. 4*) справедливі рівності:

а) $AP \cdot BP = CP^2$;

б) $\angle APC = \frac{1}{2}\left(\breve{AC} - \breve{BC}\right)$.

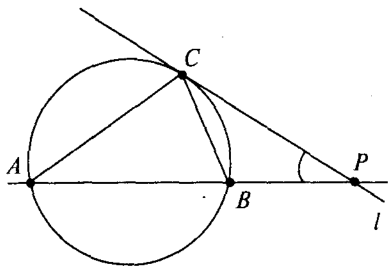


Рис. 4

З теорем 60, 61 б), 62.2 б), 63.2 б) випливає наступне твердження.

Теорема 64

Нехай дано відрізок AB, а α — одна з двох півплощин відносно прямої AB. Тоді, якщо φ — значення з інтервалу (0°; 180°), то множина точок M півплощини α, для яких $\angle AMB = \varphi$, є дуга деякого кола з кінцями A і B. Якщо точка $N \in \alpha$ лежить усередині круга, обмеженого цим колом, то $\angle ANB > \varphi$, а якщо зовні — то $\angle ANB < \varphi$.

Теорема 65

Нехай у трикутнику ABC $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ — довжини сторін, $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$ — кути, $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр, r — радіус вписаного кола, R — радіус описаного кола, h_a — довжина висоти, яка проведена до сторони BC, r_a — радіус кола, що дотикається сторони BC і продовжень сторін AB і AC. Тоді площу S трикутника ABC можна обчислити за будь-якою з наступних формул:

а) $S = \frac{ah_a}{2}$; б) $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$;

в) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона);

г) $S = \frac{abc}{4R}$; д) $S = rp$;

е) $S = \frac{1}{2}r_a(b+c-a)$; ж) $S = \frac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$.

Формула д) справедлива для площі S будь-якого многокутника з півпериметром p, описаного навколо кола радіуса r.

Теорема 66

Якщо a і b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза, r — радіус вписаного кола, а R — радіус описаного кола, то

$$r = \frac{1}{2}(a+b-c),\ R = \frac{c}{2}.$$

Теорема 67

Якщо AL — бісектриса трикутника ABC, то справедлива рівність

$$\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC}.$$

Теорема 68 (рівність паралелограма)

Для будь-якого паралелограма $ABCD$ справедлива рівність

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2.$$

Теорема 69

Для будь-якої точки P і будь-якого прямокутника $ABCD$ справедлива рівність $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

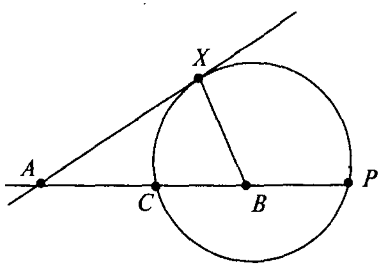


Рис. 5

Означення 29

Геометричне місце точок X площини таких, що

$$\frac{AX}{BX} = \frac{m}{n},$$

де A і B задані точки, а m і n — задані числа, називається *колом Аполонія* (*рис. 5*)

Теорема 70 (теорема Стюарта)

Якщо a, b, c — сторони трикутника ABC і точка D ділить сторону BC на відрізки $BD = a_1$, $CD = a_2$, то $AD^2 = \dfrac{a_1 b^2 + a_2 c^2 - a a_1 a_2}{a}$.

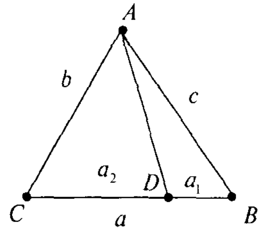


Рис. 6

Теорема 71 (формула Ейлера)

Якщо O — центр кола, вписаного в ΔABC, а O_1 — центр кола, описаного навколо ΔABC, то $OO_1^2 = R^2 - 2Rr$, де R — радіус описаного кола, r — радіус вписаного кола.

Теорема 72 (теорема Чеви)

На сторонах BC, AC, AB трикутника ABC дано точки A_1, B_1, C_1. Прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці тоді й тільки тоді, коли $\dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Прямі AA_1, BB_1, CC_1 називають *чевіанами.*

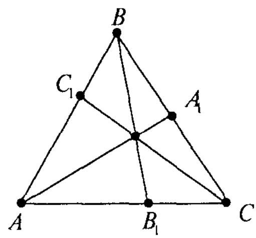


Рис. 7

Теорема 73 (теорема Менелая)

На сторонах BC, CA, AB трикутника ABC (або на їхніх продовдженнях) дано точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій тоді й тільки тоді, коли $\dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Усі проекції на прямій будемо вважати ортогональними.

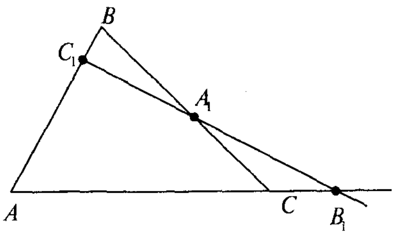


Рис. 8

Теорема 74

Якщо A_1B_1 — проекція відрізка AB на пряму, що перетинається з прямою AB під (нетупим) кутом φ, то $A_1B_1 = AB\cos\varphi$.

Теорема 75

Нехай $\vec{a}$ — ненульовий вектор на площині, а O — точка цієї площини. Тоді для будь-якого значення $k \in R$ множина точок X площини, що задовольняє рівність $\vec{a} \cdot \overrightarrow{OX} = k$, є пряма.

Теорема 76

Для будь-якого набору точок A_1, ..., A_2 і будь-якого набору чисел $k_1, \ldots, k_n \in R$, сума яких не дорівнює нулю, існує єдина точка O, що задовольняє умову $\sum_{i=1}^{n} k_i \vec{OA_i} = 0$. При цьому для будь-якої точки P справедлива рівність $\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) \cdot \vec{PO} = \sum_{i=1}^{n}\left(k_i \vec{PA_i}\right)$.

На цій теоремі засновані наступні три означення.

Означення 30

Центром ваги системи точок $A_1, \ldots, A_n$ називається точка O, що задовольняє умову $\sum_{i=1}^{n} \vec{OA_i} = 0$.

Означення 31

Центром ваги системи відрізків A_1B_1, ..., A_nB_n називається точка O, що задовольняє умову $\sum_{i=1}^{n} l_i \vec{OM_i} = 0$, де l_i $(i = 1, .., n)$ — довжина відрізка A_iB_i, а M_i — його середина.

Означення 32

Центром ваги системи трикутників $A_1B_1C_1$, ..., $A_nB_nC_n$ називається точка O, що задовольняє умову $\sum_{i=1}^{n} S_i \vec{OM_i} = 0$, де S_i $(i = 1, .., n)$ — площа трикутника $A_iB_iC_i$, а M_i — точка перетину його медіан.

Теорема 77

Якщо M — точка перетину медіани трикутника ABC, то для будь-якої точки P (не обов'язково розташованої в площині ABC) справедлива рівність $\vec{PM} = \frac{1}{3}\left(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}\right)$.

Означення 33

Кажуть, що *задано граф,* якщо, по-перше, фіксована деяка множина $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, елементи якої називаються вершинами, а по-друге, виділено довільну множину пар, складених з елементів множини A, які називають ребрами. Граф називається *орієнтованим,* якщо його ребра являють собою упорядковані пари вершин.

Прикладом неорієнтованого графа може служити граф, множиною вершин якого є деяка група людей, а ребрами є пари людей, знайомих один з одним. При цьому вважається, що відношення знайомства симетрично, тобто якщо хтось a знайомий з b, то і b знайомий з a.

Під час роботи з графом зручно користуватися його геометричною моделлю, що будується так: кожній вершині ставиться у відповідність точка площини або в просторі, а кожному ребру — відрізок або крива з кінцями у відповідних точках (у випадку орієнтованого графа на цих лініях фіксується напрямок).

Означення 34

Циклом довжини $k \geq 2$ у графі з вершинами $a_1, \ldots, a_n$ називається послідовність різних ребер вигляду $\left(a_{i_1}; a_{i_2}\right), \left(a_{i_2}; a_{i_3}\right), \ldots, \left(a_{i_{k-a}}; a_{i_k}\right), \left(a_{i_k}; a_{i_i}\right)$.

Теорема 78

У графі, що має рівно n вершин і n ребер, існує принаймні один цикл.

Теорія графіків викладена в [30].

Основи комбінаторного аналізу викладені в [28]. Властивості перестановок, розбиття і сполучень викладені також у [12], [25], [26], [29].

Означення 35

Якщо два набори елементів $\left(a_1, \ldots, a_n\right)$ і $\left(b_1, \ldots, b_n\right)$ складаються з тих самих елементів і, можливо, відрізняються тільки порядком, то один з них називається *перестановкою* іншого.

Теорема 79

Число перестановок набору, що складається з n різних елементів, дорівнює $n!$.

Теорема 80

Число m-елементних підмножин n-елементної множини (де $0 \leq m \leq n$) дорівнює C_n^m.

Число C_n^m називають також числом комбінацій з n по m.

Теорема 81

Число всіх підмножин n-елементної множини дорівнює 2^n.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кюшкар Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я. Венгерские математические олимпиады. — М.: Мира, 1976.
2. Страшевич С., Бровкин Е.. Польские математические олимпиады. — М.: Мир, 1978.
3. Морозова Е. А., Петраков И. С., Скворцов В. А. Международные математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1976.
4. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики: арифметика и алгебра. — М.: Наука, 1976.
5. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы планиметрии. — М.: Наука, 1967.
6. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики: геометрия (стереометрия). — М.: Гостехиздат, 1954.
7. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. — М.: Наука, 1970.
8. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1974.
9. Коровкин П. П. Неравенства. — М.: Наука, 1974.
10. Маркушевич А. И. Комплексные числа и конформные отображения. — М.: Наука, 1979.
11. Воробьёв Н. Н. Признаки делимости. — М.: Наука, 1974.
12. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. — М.: Наука, 1979.
13. Калужнин Л. А. Основная теорема арифметики. — М.: Наука, 1969.
14. Фомин С. В. Системы счисления. — М.: Наука, 1980.
15. Понтрягин Л. С. Комплексные числа. // Квант.— 1983.— № 2.— С. 16–19.
16. Понтрягин Л. С. Основная теорема алгебры. // Квант.— 1982.— № 4.— С. 3–9.
17. Понтрягин Л. С. Обобщения чисел. // Квант.— 1985.— № 2.— С. 6–12.
18. Олимпиады. Алгебра. Комбинаторика: сборник. / Под ред. Л. Я. Савельева. Новосибирск: Наука, 1979.
19. Ивашев-Мусатов О. С. Начала математического анализа. — М. : Наука, 1976.
20. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т. 1. — М.: Высшая школа, 1981.
21. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? — М.: Просвещение, 1968.
22. Бухштаб А. А. Теория чисел. — М.: Просвещение, 1966.
23. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1975.
24. Фадеев Д. К. Лекции по алгебре. — М.: Наука, 1984.

25. Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В. Введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1982.
26. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1976.
27. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностых задач с решениями. — М.: Наука, 1985.
28. Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика. — М.: Наука, 1975.
29. Кордемский Б. А. Математика изучает случайности. — М.: Просвещение, 1975.
30. Оре О. Теория графов. — М.: Наука, 1968.
31. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии: Стереометрия. — М.: наука, 1984 (Б-чка «Квант», вып. 17).
32. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии: Стереометрия. — М.: Наука, 1984 (Б-чка «Квант», вып. 31).
33. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Часть I. — М.: Наука, 1986.
34. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Часть II. — М.: Наука, 1986.
35. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. — К.: А.С.К., 2004. — 344 с.
36. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. Я. Математична олімпіада школярів України. 1991–2000. / Навч.-метод посібник. — К.: Техніка, 2003. — 541 с.
37. Зарубежная математическая олимпиада / Конягин С. В., Тоноян Г. А., Шарыгин И. Ф. и др., под ред. И. Н. Сергеева. — М.: Наука, 1987.
38. Нікулін О. В., Кукуш О. Г. Геометрія: Поглибл. курс: 7–9 кл.: Навч. посібник. — К.: Ірпінь: ВТФ «Перун», 1999. — 352 с.