*О. О. Курченко, В. М. Лейфура, В. М. Радченко, Г. М. Шевченко,
В. А. Ясінський*

Математичні олімпіади школярів України.
2001 – 2002 рр.

Передмова

Даний випуск продовжує серію, започатковану виданням “Математичні олімпіади школярів України. 1998 – 1999 рр.” та аналогічними для 1999 – 2000 та 2000 – 2001 рр. В посібнику зібрані матеріали математичних олімпіад школярів, що проводилися в 2001 – 2002 навчальному році.

Як відомо, Всеукраїнська олімпіада юних математиків складається з чотирьох етапів — першого (шкільні олімпіади), другого (районні та міські), третього (обласні та міські міст Києва і Севастополя) і четвертого, заключного. В цьому навчальному році в усіх областях складалися свої варіанти завдань для учасників до третього етапу включно. В якості прикладу завдань районного і обласного етапів, в даному збірнику наводяться задачі, що пропонувалися у Вінницький області.

Також подаються завдання четвертого (заключного) етапу 42-ої Всеукраїнської олімпіади юних математиків, відбірково-тренувальних зборів команди України, 43-ої Міжнародної математичної олімпіади. Наведені умови та розв’язання запропонованих задач, прізвища переможців та інша інформація.

Ці матеріали на протязі року вже публікувались в журналах “У світі математики” та “Математика в школі”, газеті “Математика” із серії “Перше вересня”, інших виданнях. Однак ми вважаємо, що зібрання всіх матеріалів в одній збірці є зручним для користування. Попит на попередні випуски даної серії це підтверджує.

Сподіваємось, що даний збірник буде корисним учням, що готуються до математичних олімпіад, їх вчителям, керівникам гуртків та всім, хто цікавиться станом математичної освіти на Україні.

Автори

Другий етап 42-ої Всеукраїнської олімпіади юних математиків

В якості прикладу завдань другого етапу олімпіади (районних олімпіад) наводимо завдання, які було запропоновано учням 6–11 класів у Вінницькій області.

Завдання

6 клас

1. Розшифруйте числовий ребус $AAAA - BBB + CC - D = 1234$ (однаковими буквами позначені однакові цифри, різними — різні).

2. Знайти найбільше число, всі цифри якого різні, а їх добуток дорівнює 360.

3. Є сім зовні однакових монет, серед яких п'ять справжні (всі однакової маси) і дві фальшиві (однакової маси, але легші за справжні). Як за допомогою двох зважувань на терезах без гир виділити три справжні монети?

4. На дошці написано декілька різних цілих чисел, причому сума будь-яких двох з них записана на дошці. Скільки чисел написано на дошці?

5. Коли в день народження вчителя математики його учні запитали, скільки йому виповнилося літ, він відповів, що коли до року його народження додати теперішній рік, потім відняти рік, коли йому виповнилося 20 років, і відняти рік, коли йому виповнилося 30 років, то в результаті буде 16. Скільки ж років йому виповнилося?

7 клас

1. Є 5 розеток в електромережі кабінета фізики і 13 трійників. Яку найбільшу кількість електроприладів можна включити в електромережу цього фізкабінета з їх допомогою?

2. Всередині тупого кута AOB провели три промені OC, OD і OE, причому $OC \perp OA$, OD - бісектриса кута AOB і OE — бісектриса кута BOC. Знайти величину кута DOE.

3. Буратіно записує натуральні числа, починаючи з 2, червоним, чорним і синім чорнилом (він використовує всі три кольори, кожне число записує одним кольором). Він стверджує, що коли помножити будь-які два числа різного кольору, то добуток буде іншого (третього) кольору. Чи не помиляється він? Відповідь обгрунтуйте.

4. На острові Контрастів живуть лицарі і брехуни. Лицарі завжди говорять правду, брехуни завжди брешуть. Деякі жителі острову зробили заяву, що

на острові парна кількість лицарів, а всі інші зробили заяву, що на острові непарна кількість брехунів. Чи може кількість жителів острову бути рівною 2001?

8 клас

1. Довести, що коли сума двох натуральних чисел дорівнює 2001, то їх добуток не ділиться на 2001.

2. Довести,що сума величин двох кутів опуклого чотирикутника більша за різницю величин двох інших його кутів.

3. Чи можна всередині трикутника із синіми вершинами відмітити 10 синіх і 20 червоних точок так, щоб жодні три сині точки не лежали на одній прямій і щоб всередині будь-якого трикутника із синіми вершинами була хоча б одна червона точка?

4. Пройшовши 3/8 довжини мосту, віслюк Іа-Іа помітив позаду себе на дорозі автомобіль, який рухається з швидкістю 60 км/год. Якщо віслюк побіжить назад, то він зустрінеться з автомобілем на початку мосту, а якщо вперед, то автомобіль наздожене його в кінці мосту. З якою швидкістю бігає Іа-Іа?

5. В рівнобедреній трапеції $ABCD$ ($AB = CD$,$BC < AD$) проведені висота BH і діагональ BD. З'ясувалося, що ця діагональ є бісектрисою кута CDA. Довести, що кут HBD дорівнює сумі кутів ABH іCBD.

9 клас

1. Точка C лежить всередині прямого кута MON. На промені OM відмітили точку A, а на промені ON - точку B. Довести, що

$$AB + BC + CA > 2 \cdot OC$$

.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n буде цілим число

$$\frac{10^n - 1}{81} - \frac{n}{9}.$$

3. На папері в клітинку намальований квадрат 100×100. Яку найменшу кількість його клітинок потрібно зафарбувати, щоб у незафарбовану частину неможна було помістити фігуру наступного вигляду

4. Нехай E — середина сторони AB правильного трикутника ABC. В площині цього трикутника відмітили точку K так, що трикутник CKE рівносторонній та точки B іK лежать по один бік від прямої CE. Довести, що прямі AC і BK паралельні.

5. Чи можуть два різні звичайні нескоротні дроби, знаменники яких 7 і 17, відрізнятися менше, ніж на 0,005?

10 клас

1. Побудувати графік функції

$$y = \frac{|x+1| + |x-1|}{|x+1| - |x-1|}.$$

2. Для деякого натурального числа n з'ясувалося, що в десятковому записі числа n^2 передостання цифра — непарна. Знайти останню цифру числа n^2.

3. Два автомобілі одночасно виїхали назустріч один одному з пунктів A і B. Перший приїхав в B через 9год. після зустрічі, а другий приїхав в A через 4год. після зустрічі. Скільки часу вони їхали до зустрічі?

4. Точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Через точки A і C провели коло, яке дотикається прямих OA і OC. Довести, що другі точки перетину прямих AB і BC з проведеним колом є кінцями його діаметра.

5. Двоє грають в таку гру: на столі лежить коробка сірників, і вони по черзі беруть звідти сірники. За один хід дозволяється взяти від одного до десяти сірників. Виграє той, хто забере останній сірник. Хто виграє: той хто починає гру чи його суперник, якщо в коробці 2001 сірник?

11 клас

1. Побувати графік функції:

$$y = |2^x - 2| + 2^x.$$

2. У трикутній піраміді $SABC$ бічне ребро SA перпендикулярне до основи ABC. Довести, що кут BSC менший за кут BAC, якщо відомо, що кути трикутника ABC при його вершинах B і C — не тупі.

3. В гострокутному трикутнику з однієї вершини провели висоту, з другої — бісектрису, з третьої — медіану. Чи може статися так, що проведені медіана і бісектриса розділять висоту на три рівні відрізки?

4. Для деякого числа x числа $\sin 2x$, $\sin 5x$ і $\sin 7x$ раціональні. Довести, що число $\sin 12x$ також раціональне.

5. Двоє гравців по черзі вставляють в запис $\ldots x + \ldots = \ldots x + \ldots$ замість пропусків (трикрапок) по одному із даних різних чисел a, b, c, d (в будь-якому порядку, але без повторень). Коли всі пропуски заповняться, розв'язують одержане лінійне рівняння. Якщо його корінь — додатне число, виграє перший гравець, інакше — другий. Хто виграє при правильній грі?

Відповіді і вказівки

6 клас

1. *Відповідь.* $2222 - 999 + 11 - 0 = 1234$.

2. *Відповідь.* 95421.

3. *Вказівка.* Занумеруйте монети числами 1, 2, 3,..., 7. Першим зважуванням порівняємо монети 1, 2, 3 з монетами 4, 5, 6. а) Якщо маси рівні, то в кожній трійці по одній фальшивій монеті, а монета 7 справжня. Тоді наступним зважуванням порівнюємо монети 1 і 2. Якщо їх маса однакова, то вони справжні, а якщо ж ні, то важча з монет 1 чи 2, монета 3 і монета 7 — справжні. б) Якщо при першому зважуванні переважила одна із груп, то всі її монети справжні.

4. *Вказівка.* Покажіть, що на дошці не може бути написано більше одного числа, а також більше одного від'ємного числа. Отже написано або два, або три числа. Наведіть приклади.

5. *Вказівка.* Позначимо через n рік народження вчителя, а через m його вік. Тоді за умовою задачі $n + (n + m) - (n + 20) - (n + 30) = 16$. Звідки $m = 66$. *Відповідь.* 66 років.

7 клас

1. *Вказівка.* Кожний увімкнений трійник додає до мережі дві розетки. *Відповідь.* 31.

2. *Відповідь.* 45°.

3. *Відповідь.* Буратіно помиляється. *Вказівка.* Нехай a_1 і a_2 червоні, b синє, а c чорне. Тоді a_1b чорне, а $a_2(a_1b)$ синє. Звідси слідує, що число a_1a_2 синє, бо $a_2(a_1b) = (a_1a_2)b$. Замінивши в цих міркуваннях число b на число c, одержимо, що число a_1a_2 чорне. Протиріччя.

4. *Відповідь.* Ні, не може. *Вказівка.* Припустимо, що може. Оскільки число 2001 непарне, то або кількість лицарів парна, а брехунів непарна, або кількість лицарів непарна, а брехунів парна. У першому випадку, всі хто зробив першу заяву — лицарі, а всі хто зробив другу — також лицарі,що неможливо, бо на острові живе хоча б один брехун. Аналогічне протиріччя одержуємо і в другому випадку.

5. *Відповідь.* Так, правий. *Вказівка.* Із розташувань кубиків A і B випливає, що вони прикладені один до одного четвірками і тому, проти грані з одиницею в усіх кубиках розташована грань з четвіркою. Далі із розташувань кубиків B і C випливає, що вони прикладені один до одного шістками, і тому проти грані з двійкою розташована грань з шісткою, а звідси випливає, що проти трійки розташована п'ятірка, це суперечить правильному розташуванні кубиків C і D.

8 клас

1. *Вказівка.* Скористаємося тим, що $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$. Нехай a і b такі натуральні числа, що $a + b = 2001$ і $(ab) \vdots 2001$. Тоді $(ab) \vdots 3$. Звідси слідує, що $a \vdots 3$ або $b \vdots 3$. Якщо, наприклад, $a \vdots 3$, то з умови випливає,що і $b \vdots 3$. Аналогічно доводиться, що $a \vdots 23$ і $b \vdots 23$, а також $a \vdots 29$ і $b \vdots 29$. Тому $a \vdots 2001$ і $b \vdots 2001$, тобто $a \geqslant 2001$ і $b \geqslant 2001$, що суперечить умові $a + b = 2001$.

2. Нехай α, β, γ, δ — кути опуклого чотирикутника. Це означає, що всі вони знаходяться в межах від $0°$ до $180°$. Оскільки $\delta < 180°$, то $2\delta < 360° = \alpha + \beta + \gamma + \delta$. Звідки $\delta - \gamma < \alpha + \beta$.

3. *Відповідь.* Ні, не можна. *Вказівка.* При будь-якому розташуванні синіх точок даний трикутник можна розбити на маленькі трикутники із синіми вершинами. °х кількість не залежить від способу розбиття і дорівнює $2k + 1$, де k — число синіх точок всередині даного трикутника.

4. *Відповідь.* 15 км/год. *Вказівка.* Якщо довжина мосту l км, відстань від автомобіля до початку мосту s км, а швидкість Іа-Іа x км/год, то

$$\frac{s}{60} = \frac{\frac{3}{8}l}{x}, \quad \frac{s+l}{60} = \frac{\frac{5}{8}l}{x}.$$

Звідки знаходимо, що $s = \dfrac{3}{8}l$ і $x = 15$.

5. *Вказівка.* Нехай $\angle HBD = \alpha$, $\angle ABH = \beta$ і $\angle CBD = \gamma$. Оскільки DB — бісектриса кута CDA, то $\angle CDB = \angle BDA$, а враховуючи паралельність BC і AD, маємо, що $\angle CDB = \angle CBD = \gamma$. Отже, $\angle BAD = \angle CDA = 2\gamma$ (бо трапеція рівнобедрена). Тому $2\gamma + \beta = 90° = \alpha + \beta$, звідки $\alpha = \beta + \gamma$.

9 клас

1. *Вказівка.* Відобразити точку C симетрично відносно прямих OM і ON, а далі скористатися тим, що довжина ламаної більша за довжину відрізка, що з'єднує її кінці.

2. *Вказівка.* Помічаємо, що $10^n - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{n}$. Далі скористатися ознакою подільності на 9.

3. *Відповідь.* 5000. *Вказівка.* Розбити даний квадрат на $50 \cdot 50 = 2500$ квадратів 2×2. В кожному з цих квадратів потрібно зафарбувати щонайменше 2 клітинки. Отже, зафарбованих клітинок повинно бути не менше, ніж $2 \cdot 2500 = 5000$. Далі потрібно навести приклад потрібного розфарбування.

4. *Вказівка.* $\angle CBE = \angle CKE = 60°$. Отже, точки C, E, B, K лежать на одному колі. Тому $\angle ACB = 60° = \angle CEK = \angle CBK$, тобто $AC||BC$.

5. *Відповідь.* Ні. *Вказівка.* Нехай m і n — натуральні числа, взаємно прості з 7 і 17 відповідно, тоді

$$\left|\frac{m}{7}-\frac{n}{17}\right|=\frac{|17m-7n|}{7\cdot 17}\frac{1}{7\cdot 17}>0,005,$$

бо $17m-7n\neq 0$.

10 клас

1. *Вказівка.* Застосовуючи метод інтервалів, одержимо

$$y=\left\{\begin{array}{l} x, x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\,, \\ \dfrac{1}{x}, x\in[-1;0)\cup(0;1]\,. \end{array}\right.$$

2. *Відповідь.* 6.

3. *Відповідь.* 6 год. *Вказівка.* Нехай x км/год — швидкість автомобіля, який виїхав з пункту A, а y км/год — швидкість автомобіля, який виїхав з пункту B, тоді відстань від A до місця зустрічі дорівнює $4y$ км, а відстань від B до місця зустрічі дорівнює $9x$ км. Отже, $t=\dfrac{4y}{x}=\dfrac{9x}{y}$ - шуканий час.

4. *Вказівка.* Нехай O_1 — центр кола, яке проходить через A і C та дотикається до OA і OC, тоді $\angle OAO_1=\angle OCO_1=90°$. Позначимо через M і N другі точки перетину прямих AB і BC з колом O_1 . Далі доведіть, що сума кутів AO_1M і CO_1N дорівнює $2\hat{B}$. Звідси й слідує, що точки M, O_1, N колінеарні.

5. *Відповідь.* Виграє перший гравець. *Вказівка.* Перший гравець своїм першим ходом забирає 10 сірників і в коробці залишиться 1991 сірник. Оскільки $1991\,\vdots\,11$, то далі стратегія гри першого гравця така: якщо другий гравець забирає n сірників ($1\leqslant n\leqslant 10$), то перший забирає $11-n$ сірників. Після цього загальна кількість сірників в коробці зменшиться на 11. Граючи в такий спосіб, перший гравець здобуде перемогу.

11 клас

1. *Вказівка.* Застосуйте метод інтервалів. Одержимо

$$y=\left\{\begin{array}{l} 2, x\in(-\infty;1)\,; \\ 2^{x+1}-2, x\in[1;+\infty)\,. \end{array}\right.$$

2. *Вказівка.* Застосуйте теорему косинусів до трикутників ABC і SBC.

3. *Відповідь.* Ні, не може. *Вказівка.* Нехай бісектриса BL перетинає висоту AH в точці P, а медіана CM перетинає її в точці Q. Користуючись методом від супротивного, спочатку доведіть, що Q лежить між A і P, а потім

одержіть протиріччя з того, що середня лінія MN перетинає висоту AH навпіл.

4. *Вказівка.* Якщо $\sin 2x \neq 0$, то твердження задачі випливає із тотожності $\sin 2x \cdot \sin 12x = \sin^2 7x - \sin^2 5x$; якщо ж $\sin 2x = 0$, то і $\sin 12x = 0$.

5. *Відповідь.* Виграє другий. *Вказівка.* Можна вважати, що $a < b < c < d$. Розіб'ємо ці числа на пари $\{a; b\}$ і $\{c; d\}$. Після ходу першого гравця другий ставить друге число тієї ж пари в ту ж саму частину рівняння. В результаті коефіцієнти з однієї сторони рівняння будуть меншими за відповідні коефіцієнти другої сторони рівняння. Тому, при будь-якому додатному x одна частина рівності буде меншою за другу. А це означає, що жодне додатне число не буде коренем рівняння.

Третій етап 42-ої Всеукраїнської олімпіади юних математиків

В цьому навчальному році тексти завдань третього (обласного) етапу Всеукраїнської олімпіади готувалися окремо в кожній області. Як приклад, ми наводимо задачі, що пропонувалися школярам у Вінницький області.

Завдання

7 клас

1. В компанії з трьох чоловік один - правдивий, тобто завжди говорить правду, один - брехун, тобто завжди бреше, і один - дипломат, тобто говорить правду або бреше на свій розсуд. Щоб узнати, хто з них є хто, кожного запитали, хто він є. Перший відповів, що він правдивий, другий - що він брехун, а третій - що він правдивий, або брехун. Хто з них є хто? Відповідь обгрунтувати.

2. Доведіть, що число $1334\underbrace{00\ldots00}_{2002}4669$ ділиться на 2001.

3. Після того як Наталка з'їла половину слив із банки, рівень компоту понизився на одну третину. На яку частину (від одержаного рівня) понизиться рівень компоту, якщо вона з'їсть половину слив, що залишились?

4. Клітинки квадрата 100×100 пофарбовані в білий і чорний кольори в шаховому порядку. Квадрат розрізали на квадрати з непарними сторонами, і в кожному квадраті відмітили центральну клітинку. Доведіть, що білих і чорних клітинок відмічено порівну.

5. Є лінійка довжиною 9 см без поділок. Яку найменшу кількість поділок потрібно нанести на лінійку, щоб за допомогою неї можна було відкласти відрізки довжиною 1 см, 2 см, 3 см, ..., 9 см, приклавши лінійку лише один раз (в кожному випадку)?

8 клас

1. Яких п'ятицифрових чисел більше: які не діляться на 5, чи тих, у яких ні перша, ні друга зліва цифри не п'ятірки?

2. В ящику у Карлсона лежать цукерки трьох сортів: з горіхами, з родзинками, з полуницями. Карлсона стверджує, що які б сто цукерок не вийняли з його ящика, серед них обов'язково зустрінуться цукерки з родзинками і з полуницями. Яка найбільша кількість цукерок може бути в ящику у Карлсона?

3. Є п'ять металевих кульок і шалькові терези без гирьок. Якісь три з них важать по 10, а про інші дві відомо, що вони важать однаково. Як за допомогою двох зважувань знайти хоча б одну 10-грамову кульку?

4. Доведіть, що центри квадратів, зовні побудованих на сторонах довільного паралелограма, є вершинами деякого квадрата.

5. Задумали два натуральних числа. Математику A сповістили їх суму, а математику B - суму їх квадратів. Якщо A й B обміняються своєю інформацією, то вони, напевно, визначать ці числа. Але вони визначили їх у процесі такої розмови: B. - Я не знаю, які це числа. A. - °х сума більша десяти. B. - Тоді я знаю, які це числа. Знайдіть і ви ці числа.

9 клас

1. Про дійсні числа x, y, z відомо, що

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}.$$

Доведіть, що хоча б два з цих чисел рівні між собою.

2. Нехай K - середина гіпотенузи AB трикутника ABC, а M - точка, яку відмітили на катеті AC так, що $AM = 2 \cdot CM$. Доведіть, що $\angle MKC = \angle ABM$.

3. Нехай a, b, c - числа з проміжку $[0;1]$. Довести, що виконується нерівність

$$abc + 2 \geqslant a + b + c.$$

4. Чи існує таке натуральне число n, що число $2002^n - 1$ ділиться на число $6^n - 1$?

5. В кожній клітинці таблиці 2002×2004 стоїть 1. Дозволяється вибрати довільний квадратик 2×2 і замінити в ньому знак у всіх чисел. Чи можна за допомогою таких дій одержати шахове розміщення знаків в таблиці? Відповідь обгрунтуйте.

10 клас

1. В компанії із шести чоловік один правдивий, тобто завжди говорить правду, двоє - дипломати, тобто говорять правду або брешуть на свій розсуд, а інші - брехуни, тобто завжди брешуть. Щоб взнати, хто з них є хто, кожного запитали, хто він є. Перший відповів, що він правдивий, другий - що дипломат, третій - що він брехун, четвертий - що він не правдивий, п'ятий - що він не дипломат, а шостий - що він не брехун. Хто з них є хто?

2. Знайти найменше натуральне число, квадрат якого (його десятковий запис) закінчується на 2001.

3. Довести, що коли $\sin x + \sin y + \sin z \geqslant \sqrt{5}$, то $\cos x + \cos y + \cos z \leqslant 2$.

4. Коло дотикається сторін кута ABC в точках A і C. Пряма, що проходить через точку B, перетинає коло в точках D і E, причому $AE \parallel BC$. Прямі AD і BC перетинаються в точці F. Знайти BF, якщо $AB = 1$.

5. На дошці записані числа 1, 2, 3,..., 19, 20. Дозволяється будь-яку пару чисел x та y стерти, а замість них записати число $x + y + 5xy$. Чи можна наприкінці одержати число 20022001 ?

11 клас

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} = x$.

2. Про трикутник ABC відомо, що $\angle A - \angle B = 90^\circ$ і $BC + CA = 2 \cdot AB$. Знайти $\cos \angle C$.

3. Про функцію $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ відомо, що $f(1) = 1$ і для будь-яких дійсних x та y виконується рівність $f(x) + f(y) = f(x + y) - xy - 1$. Знайти всі цілі числа n такі, що $f(n) = n$.

4. Випускники школи, що вступали до університету, розповіли своєму вчителю про свої екзамени з математики (письмово і усно) наступне. А н д р і й: Мої дві оцінки - четвірки. В а с и л ь: Я отримав трійку і п'ятірку. С е м е н: А я - трійку і четвірку. Потім вони зізнались, що кожний сповістив не свої оцінки, а оцінки одного із двох інших. Вчитель сказав, що він визначить оцінки кожного, попросивши лише одного правильно назвати будь-яку із своїх оцінок. Кому він задав своє запитання і як визначив оцінки учнів, якщо на запитання він отримав відповідь: - П'ятірку! ?

5. Таблиця 7×7 заповнена числами 1, 2, 3,..., 48, 49 причому, будь-які два послідовних числа записані в сусідніх (що мають спільну сторону) клітинках. Яка найбільша кількість простих чисел може опинитись в одному стовпці?

Вказівки та розв'язання задач

7 клас

1. *Вказівка*: Помічаємо, що ні другий, ні третій брехунами бути не можуть. Тому брехун - перший. Після цього зрозуміло, що другий може бути лише дипломатом. А тоді третій - правдивий.

2. *Вказівка*: Помічаємо, що $2001 = 3 \cdot 667$, причому числа 3 і 667 взаємно прості. Тому достатньо довести подільність даного числа на 3 і на 667. Перша подільність випливає з відповідної ознаки подільності (сума цифр в даному числі ділиться на 3), а другу можна встановити діленням "стовпчиком".

3. *Відповідь*: $\frac{1}{4}$. *Вказівка*: Оскільки половина слив становить $\frac{1}{3}$ рівня, то половина від половини слив буде становити $\frac{1}{6}$ рівня. Отже, одержаний рівень

($\frac{2}{3}$ рівня) понизиться на $\frac{1}{6}$ рівня, що складає $\frac{1}{6} : \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$ частину одержаного рівня.

4. *Вказівка*: Помічаємо, що в квадраті з непарними сторонами кількість клітинок, які мають колір центральної клітинки, на 1 більша за кількість клітинок іншого кольору. Нехай квадрат 100×100 розрізали на n квадратів, у яких центральна клітинка - біла, і на m квадратів, у яких центральна клітинка - чорна. Позначимо через k - кількість всіх білих клітинок у квадратах, у яких центральна клітинка - біла, тоді в цих квадратах $k - n$ чорних клітинок; позначимо через l - кількість всіх чорних клітинок, у яких центральна клітинка - чорна, тоді в цих квадратах $l - m$ білих клітинок. Оскільки в даному квадраті 5000 чорних і 5000 білих клітинок, то $k + l - m = 5000$ і $k - n + l = 5000$. Звідки слідує, що $m = n$.

5. *Відповідь*: 3. *Вказівка*: Двох поділок недостатньо, бо разом з кінцями лінійки ми отримаємо 4 точки, і матимемо лише $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ відрізків, а нам потрібно 9 різних за довжиною відрізків. Поставивши три поділки в 1, 4 і 7 см від лівого кінця лінійки, ми одержимо потрібну нам лінійку (перевірку зробіть самостійно).

8 клас

1. *Відповідь*: Порівну. *Вказівка*: Всього є $100000 - 10000 = 90000$ п'ятицифрових чисел, і кожне п'яте з них, тобто всього $90000 : 5 = 18000$, діляться на 5. Кількість чисел, які не діляться на 5, буде рівною$90000 - 18000 = 72000$. З п'ятірки починаються рівно 10000 чисел (з 50000 по 59999), а серед інших мають її на другому зліва місці рівно 8000 чисел (з 15000 по 15999, з 25000 по 25999, і т. д. - всього 8 серій по 1000 чисел). Звідси одержуємо, що кількість потрібних чисел другого виду буде рівною $90000 - 10000 - 8000 = 72000$.

2. *Відповідь*: 197. *Вказівка*: Помічаємо, що коли знайти суму числа цукерок без родзинок з числом цукерок без полуниць, то вона буде більшою числа всіх цукерок в ящику (на число цукерок з горіхами). Число цукерок без родзинок не перевищує 99 (враховуємо твердження Карлсона). Таке саме можна стверджувати і про число цукерок без полуниць. Тому число цукерок в ящику менше, ніж $99 + 99 = 198$, тобто не перевищує 197. Приклад, коли це число досягається такий: 98 цукерок з родзинками, 98 цукерок з полуницями і 1 цукерка з горіхами, тобто всього 98+98+1=197.

3. *Вказівка*: Виберемо дві пари кульок і порівняємо вагу в кожній парі. Якщо обидва рази терези будуть в рівновазі, то 10г має кулька, яка не зважувалась, тобто п'ята. Те ж саме буде, якщо обидва зважування показали,

що кульки мають різну вагу. Якщо ж терези показали рівновагу тільки один раз, то врівноважені кульки мають масу по 10г

4. *Вказівка*: Нехай O_1, O_2, O_3, O_4 - центри квадратів, які побудовані на сторонах AB, BC, CD, DA паралелограма $ABCD$ відповідно. Тоді трикутники O_1AO_4 і O_1BO_2 -рівні (за двома сторонами і кутом між ними). Звідси слідує, що $O_1O_4 = O_1O_2$, а $\angle O_2O_1O_4 = 90°$.

5. *Відповідь*: 4 і 7. *Вказівка*: Нехай a і b - шукані натуральні числа (ab), тоді з розмови слідує, що існують такі натуральні числа m і n (mn), що $a^2+b^2 = m^2+n^2$, де $a+b > 10$ і $m+n10$. Звідси послідовно одержуємо: $b \geqslant 6$, $m \leqslant 5$, $n \leqslant 9$, $a \leqslant 9$. Виписавши всі можливі $a^2 + b^2$ і $m^2 + n^2$ побачимо, що потрібна рівність буде лише для чисел $a = 4$, $b = 7$, $m = 1$ і $n = 8$.

9 клас

1. *Вказівка*: Дана рівність еквівалентна такій рівності $\dfrac{(y-x)(x-z)(z-y)}{xyz} = 0$. Звідки й випливає твердження задачі.

2. *Вказівка*: Помічаємо, що трикутник CKA - рівнобедрений. Нехай N - середина MA, тоді KN - середня лінія трикутника BMA. Отже, $KN||BM$ і тому $\angle MBA = \angle NKA$. Але трикутники KCM і KAN рівні (за двома сторонами і кутом між ними). Тому, $\angle CKM = \angle AKN$.

3. *Вказівка*: Розглянемо функцію $f(x) = (bc-1)x - b - c + 2$. Вона є лінійною з не додатним кутовим коефіцієнтом (бо $0 \leqslant b \leqslant 1$ і $0 \leqslant c \leqslant 1$). Отже, вона досягає свого найменшого значення на проміжку $[0;1]$ при $x = 1$, тобто

$$f(a) \geqslant f(1) = bc - 1 - b - c + 2 = (b-1)(c-1) \geqslant 0.$$

4. Нехай таке число n ($n \in N$) існує. Оскільки 6^n закінчується цифрою 6, то число $6^n - 1$ закінчується на цифру 5. Отже, на 5 ділиться і число $2002^n - 1$. Звідси слідує, що $n = 4k$, де $k \in N$. Але $6^{4k} - 1 = 36^{2k} - 1 = (36^k - 1)(36^k + 1)$ ділиться на $36 - 1 = 35$, що ділиться на 7. Тому й $(2002^n - 1) \vdots 7$, що неможливо, бо $2002 = 7 \cdot 286$.

5. Нехай в нашій таблиці рядки мають по 2002 клітинки. Помічаємо, що в результаті виконання вказаної дії остача від ділення на 4 суми чисел будь-якого рядка не змінюється. Якщо припустити, що в результаті вказаних дій можна одержати шахове розміщення знаків, то на початку сума чисел першого рядка дорівнює $2002 \equiv 2 (\mathrm{mod} 4)$, а на при кінці - дорівнює 0, що суперечить поміченій властивості.

10 клас

1. *Вказівка*: Третій і четвертий дали такі відповіді, які можуть дати лише дипломати. Відповідь п'ятого не може бути відповіддю брехуна, тому, п'ятий - правдивий. А тоді перший, другий і шостий - брехуни.

2. *Вказівка*: Нехай n - натуральне число, квадрат якого закінчується цифрами 2, 0, 0, 1 (у вказаному порядку). Тоді $n^2-1=(n-1)(n+1)$ ділиться на $2000=2^4\cdot 5^3$, а оскільки НСД$(n-1;n+1)\leqslant 2$, то одне з чисел $n-1$ чи $n+1$ ділиться на $5^3=125$. Якщо $n-1$ кратне 125, то $n\in\{1,126,251,...\}$, а якщо $n+1$ кратне 125, то $n\in\{124,249,374,...\}$. Простою перевіркою встановлюємо, що найменшим числом з потрібною на властивістю є 249.

3. *Вказівка*: Припустимо, що $\cos x+\cos y+\cos z>2$ при деяких x, y, z. Тоді

$$(\sin x+\sin y+\sin z)^2+(\cos x+\cos y+\cos z)^2>(\sqrt{5})^2+2^2,$$
$$3+2(\cos(x-y)+\cos(y-z)+\cos(z-x))>9,$$

звідки $\cos(x-y)+\cos(y-z)+\cos(z-x)>3$. Очевидно, що остання нерівність виконуватися не може, бо $\cos\alpha\leqslant 1$ при будь-якому α. Твердження задачі доведено від супротивного.

4. *Вказівка*: Нехай дотична до кола, проведена в точці E, перетинає пряму BC в точці P. Тоді $\angle BPE=\angle ABF$, бо дуги AC і CE, які лежать між прямими BP і AE, рівні. Звідси $PC=PE=BA=BC$ і $\angle PBE=\frac{1}{2}\left(\breve{CE}-\breve{CD}\right)=\frac{1}{2}\breve{AD}=\angle BAF$. Трикутники BAF і BEP подібні, причому $BF:BA=PE:PB=1:2$. Отже, $BF=\frac{1}{2}$.

5. *Вказівка*: За модулем 5 одержане наприкінці число еквівалентне сумі даних чисел $1+2+3+...+20=210\equiv 0(\bmod 5)$, тобто одержане наприкінці число ділиться на 5, чого не можна сказати про 20022001.

11 клас

1. *Відповідь*: $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. *Вказівка*: Дане рівняння рівносильне такій системі

$$\begin{cases} x\geqslant 1,\\ 1=(x-1)^2(x+1).\end{cases}$$

Звідси знаходимо, що $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. *Відповідь*: $\cos\angle C=\frac{3}{4}$. *Вказівка*: Застосуйте теорему синусів.

3. *Відповідь*: $n=-2, n=1$. *Вказівка*: Нехай $x=1$,тоді $f(y+1)-f(y)=$

$y+2$. Нехай $y=0$, тоді $f(0)=-1$. Для цілого $n>0$, маємо

$$f(n)-f(0)=\sum_{y=0}^{n-1}\left(f(y+1)-f(y)\right)=\sum_{n=0}^{n-1}(y+2)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1,$$

тобто $f(n)=\dfrac{n^2+3n-2}{2}$. Аналогічно, при цілому $n<0$ також маємо $f(n)=\dfrac{n^2+3n-2}{2}$. Рівність $f(n)=n$ виконується тоді і тільки тоді, коли $n=1$ або $n=-2$.

4. *Вказівка*: З умови задачі випливає, що можливі лише два варіанти розподілу оцінок: Андрій - 3 і 5, Василь - 3 і 4, Семен - 4 і 4, або Андрій - 3 і 4, Василь - 4 і 4, Семен - 3 і 5, які однозначно визначаються по будь-якій оцінці Семена (але не Андрія, і не Василя). *Відповідь*: Вчитель задав своє запитання Семену. Оскільки він відповів "5ку, то Андрій одержав 3 і 4, Василь - 4 і 4, а Семен - 3 і 5.

5. *Відповідь*: П'ять. *Вказівка*: Пофарбуємо клітинки таблиці в два кольори в шаховому порядку. Із умови задачі випливає, що всі парні числа опиняються в клітинках одного кольору, а всі непарні - в клітинках другого кольору. Оскільки у будь-якому стовпчику три клітинки одного кольору і чотири другого, то в ньому буде три парних і чотири непарних числа, або чотири парних і три непарних числа. Оскільки серед простих чисел парних чисел лише одне, то всього простих чисел у стовпчику може бути максимум п'ять. Приклад, коли їх рівно 5 показано в наступній таблиці (відповідні прості числа відмічені зірочками).

21	20	19*	18	17	36	37
22	3	2*	1	16	35	38
23	4	5*	6	15	34	39
24	9	8	7	14	33	40
25	10	11*	12	13	32	41
26	27	28	29	30	31	42
49	48	47*	46	45	44	43

Заключний етап 42-ої Всеукраїнської олімпіади юних математиків

Чергова олімпіада кращих юних математиків України проходила з 23 по 29 березня 2002 р. в м. Кам'янці-Подільському Хмельницької області. Ми подаємо список переможців, тексти завдань олімпіади, вказівки та розв'язання запропонованих задач.

Дипломи I ступеня

8 клас

Кузнецов Василь (м. Київ, ліцей "Лідер")
Чепляка Роман (м. Одеса, Рішельєвський ліцей)

9 клас

Добровольська Галина (м. Київ, ліцей "Лідер")
Есебуа Георгій (м. Харків, ФМЛ № 27)
Петровський Дмитро (УФМЛ)
Цимбалюк Олександр (м. Харків, ФМЛ № 27)
Ятченко Артем (м. Харків, ФМЛ № 27)

10 клас

Гордон Дмитро (м. Харків, академічна гімназія № 45)
Мартишко Сергій (УФМЛ)
Шепельська Варвара (м. Харків, ФМЛ № 27)

11 клас

Аввакумов Сергій (м. Севастополь, СЗШ № 1, учень 10 класу)
Мельниченко Святослав (м. Вінниця, ліцей № 7)
Рибак Микола (м. Миколаїв, Муніципальний колегіум)

Дипломи II ступеня

8 клас

Астаф'єв Дмитро (м. Запоріжжя, ліцей № 99)
Козумляк Андрій (м. Вінниця, ліцей № 7)
Лелеченко Андрій (м. Одеса, Маріїнська гімназія)
Мисак Данило (м. Київ, ліцей "Лідер")
Попович Дмитро (м. Київ, ліцей "Лідер")
Хацько Кирило (м. Харків, ФМЛ № 27)

9 клас

Даменія Маріка (м. Вінниця, школа № 6)
Журба Ярослав (Запорізька обл., м. Мелітополь, гімназія № 10)
Каменський Богдан (м. Львів, ФМЛ)
Ляшенко Юрій (м. Вінниця, гімназія № 17)
Муравський Андрій (м. Севастополь, політехнічний ліцей)
Сеніна Ганна (м. Одеса, Рішельєвський ліцей)
Туманян Арам (м. Київ, ліцей "Лідер")

10 клас

Авоянц Олександр (УФМЛ)
Жиляєв Сергій (УФМЛ)
Мамай Ігор (м. Запоріжжя, ліцей "Вибір")
Мартинів Андрій (м. Львів, ФМЛ)
Могилевський Євген (м. Луганськ, СЗШ ФМП № 1)
Поплавський Михайло (м. Харків, ФМЛ № 27)
Самусенко Єгор (м. Київ, ліцей "Лідер")
Щербина Тетяна (м. Харків, ФМЛ № 27)

11 клас

Васильків Максим (м. Львів, ФМЛ)
Веденський Кирило (м. Київ, ліцей "Наукова зміна")
Володько Сергій (Донецька обл., м. Краматорськ, СЗШ № 35)
Дудко Артем (м. Харків, ФМЛ № 27)
Матохнюк Тарас (м. Вінниця, ліцей № 7, учень 10 класу)
Рибак Олександр (м. Київ, ліцей "Лідер")
Рисай Євген (УФМЛ)
Шерстюк Антон (м. Київ, ліцей "Лідер")

Дипломи III ступеня

8 клас

Апостол Роман (Тернопільска обл., м. Теребовля, СЗШ № 1)
Владика Антон (АР Крим, м. Ялта, Кореїзька СЗШ)
Кожаєв Володимир (Дніпропетровська обл., м. Жовті Води, ліцей природничо-наукового навчання)
Кунцьо Іван (м. Тернопіль, технічний ліцей)

Лях Анастасія (Донецька обл., м. Авдіївка, СЗШ № 6)
Сапсай Володимир (м. Черкаси, ФМЛ)
Сачугов Дмитро (Сумська обл., м. Конотоп, міська гімназія)
Сорока Павло (м. Луцьк, гімназія № 4)
Чепкий Микола (м. Херсон, обласний ліцей)

9 клас

Брєусов Сергій (м. Дніпропетровськ, обласний ліцей фізико-математичного профілю)
Зухба Расим (м. Донецьк, СЗШ № 70)
Клурман Олексій (м. Львів, ФМЛ)
Нейман Євген (м. Донецьк, ФМШ № 35)
Печений Олександр (Хмельницька обл., м. Кам'янець-Подільський, ліцей "Антей")
Терлецький Юрій (м. Київ, ліцей "Наукова зміна")
Фрей Олександр (м. Севастополь, СЗШ № 45)

10 клас

Бурдейний Віктор (м. Одеса, Рішельєвський ліцей)
Гавран Володимир (м. Львів, ФМЛ)
Гвоздецький Олег (м. Тернопіль, технічний ліцей)
Кацев Максим (м. Севастополь, СЗШ № 7)
Колосов Олексій (м. Донецьк, ліцей при ДНУ)
Коренкевич Дмитро (Дніпропетровська обл., м. Дніпродзерджинськ, технічний ліцей № 1)
Крегель Олег (м. Львів, ФМЛ)
Майзліш Олександр (Хмельницька обл., м. Шепетівка, НВО № 2)
Макарчук Олег (Кіровоградська обл., Доброведичківська СЗШ)
Скрябін Олег (м. Донецьк, НВК № 1)
Шарманська Вікторія (м. Івано-Франківськ, ОСШІ "Фізико-технічний ліцей при ІФНТУНГу")

11 клас

Анікушин Андрій (УФМЛ)
Білянін Ігор (м. Чернівці, СЗШ № 11)
Головенко Адам (м. Луцьк, гімназія № 21)
Карташов Юрій (м. Київ, природничо-науковий ліцей № 145)
Мальцев Віктор (УФМЛ)

Мілютін Максим (Полтавська обл., м. Кременчук, гімназія № 6)

Олефіренко Сергій (м. Київ, ліцей “Лідер”)

Попов Антон (м. Луганськ, ліцей іноземних мов)

Садовніченко Олексій (Дніпропетровська обл., м. Жовті Води, ліцей природничо-наукового навчання)

Тарасюк Сергій (м. Вінниця, технічний ліцей)

Ткачук Антон (м. Харків, ФМЛ № 27)

Чубенко Олексій (Чернігівська обл., м. Прилуки, гімназія № 5)

Завдання олімпіади

8 клас

1. Знайти всі дійсні значення a, при яких система

$$\begin{cases} (y-x)(x-a)=0, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

має рівно три розв'язки.

2. Нехай $ABCD$ є рівнобедреною трапецією, в якій BC — менша основа, точки M і N — середини сторін AB і AD відповідно, а відрізок BP — висота трапеції $ABCD$. Позначимо через Q точку перетину відрізків DM і BN. Довести, що точки P, Q і C лежать на одній прямій.

3. Знайти всі пари натуральних чисел m і n, для яких виконується рівність

$$2002^n - 2001^n = m^{2002}.$$

4. Чи існує такий степінь двійки з натуральним показником, що його можна подати у вигляді суми декількох (принаймні двох) послідовних натуральних чисел?

5. Даний шестикутник, у якого всі кути рівні. Довести, що різниці його протилежних сторін — рівні.

6. На сторонах трикутника ABC (кут B — тупий) зовні його побудовано рівносторонні трикутники ABC_1, AB_1C і A_1BC. Нехай B_2 і C_2 — такі точки, що ABC_1B_2 і ACB_1C_2 — ромби. Довести, що пряма AA_1 ділить відрізок B_2C_2 навпіл.

9 клас

1. Знайти всі дійсні значення a, при яких система

$$\begin{cases} (y-|x|)(x-a)=0, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

має рівно три розв'язки.

2. Для додатних чисел $x,\ y,\ z$ довести нерівність

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+x^2}\geqslant x+y+z.$$

3. Нехай точка K належить стороні AB трикутника ABC, причому відрізок CK перетинає його бісектрису BF в такій точці Q, що $\angle BQC = 2\angle BFA$ і $\angle BAF = 2\angle CQF$. Довести, що $KF = FC$.

4. Дано нескінченний в усі боки аркуш паперу в клітинку. Чи можна в кожній клітинці записати ціле число так, щоб

1) були записані всі цілі числа, причому кожне з них — тільки один раз;

2) в кожному стовпчику існує число, менше за всі інші числа цього стовпчика, а в кожному рядку існує число, більше за всі інші числа цього рядка.

5. В гострокутному трикутнику ABC кут ABC дорівнює $60°$, $A_1,\ B_1,\ C_1$ — основи висот, опущених з вершин $A,\ B,\ C$ відповідно. На променях B_1A_1 і B_1C_1 відмітили точки N і M відповідно так, що вони лежать зовні трикутника ABC і $NA_1 = A_1C_1 = C_1M$. Довести, що точки $N,\ B,\ M$ лежать на одній прямій.

6. Знайти всі такі натуральні числа $k < 2002$, що число

$$5n^7+7n^5+kn$$

ділиться на 35 при всіх натуральних n.

7. Яку найменшу кількість п'ятиклітинкових фігурок вигляду можна випиляти по лініях сітки з клітчастої дошки розміру 8×8 так, щоб з решти цієї дошки не можна було випиляти по лініях сітки жодної такої ж самої фігурки?

8. Множину чисел 1, 2, 3, …, 2001, 2002 розбито на дві групи. До першої групи віднесли всі числа з непарною сумою цифр, а до другої — з парною. Знайти різницю між сумою чисел першої групи і сумою чисел другої групи.

10 клас

1. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{3+2000x}+9<4x^2+\sqrt{2002x}.$$

2. Знайти всі пари многочленів P, Q з дійсними коефіцієнтами ненульових степенів такі, що для всіх дійсних x, y виконується рівність

$$(P(x))^2+(Q(y))^2=P(y^2)+Q(x^2).$$

3. В коло вписаний гострокутний трикутник ABC. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте хоча б один вписаний в це коло шестикутник з площею вдвічі більшою, ніж площа трикутника ABC.

4. Для кожного натурального числа $n \geq 6$ через $k(n)$ позначимо найменше натуральне число таке, що з довільних $k(n)$ різних натуральних чисел, кожне з яких не перевищує n, можна вибрати 4 числа, одне з яких дорівнює сумі трьох інших. Довести, що $k(n) = \left[\frac{2}{3}(n+1)\right] + 2$. (Тут $[x]$ – найбільше ціле число, яке не перевищує x.)

5. У трикутнику ABC $\angle A = 2\angle B$, M – середина сторони AB. Довести, що

$$\frac{4 \cdot CM^2}{AC^2} = 5 - 4\cos^2 \angle A.$$

6. Знайти всі натуральні числа n такі, що числа

$$n,\ [n\sqrt{2}],\ \left[[n\sqrt{2}]\sqrt{2}\right]$$

утворюють арифметичну прогресію. (Тут $[x]$ – найбільше ціле число, яке не перевищує x.)

7. Трикутник ABC вписаний в коло. Точки A_1, B_1, C_1 – відповідно середини дуг BC, CA, AB, а точки A_2, B_2, C_2 – відповідно точки дотику до сторін BC, CA, AB кола, вписаного у трикутник ABC. Довести, що прямі A_1A_2, B_1B_2 та C_1C_2 перетинаються в одній точці.

8. Знайти найбільше значення числа K, для якого нерівність

$$\frac{1}{(x+y+z)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{K}{\sqrt{(x+y+z)xyz}}$$

виконується для всіх додатних чисел x, y, z.

11 клас

1. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$n^{2002} = m(m+n)(m+2n)\cdots(m+2001n).$$

2. Довести, що середнє арифметичне всіх дільників довільного натурального числа n (включаючи 1 та n) лежить між $\sqrt{n}$ та $\frac{n+1}{2}$.

3. Нехай $p > 2$ — просте число, $k > 1$ — кількість фарб, $k-1$ та p взаємно прості. Довести, що кількість способів фарбування сторін правильного p-кутника так, щоб сусідні сторони були пофарбовані в різні кольори (многокутник повертати не можна), ділиться на $(k-1)p$.

4. Основою чотирикутної піраміди $SABCD$ є ромб $ABCD$. Відомо, що $\angle SBA+\angle SBC = 180^\circ$. На ребрі SC відмітили точку M так, що $SM/MC = 2$. Довести, що площина, яка проходить через пряму DM і паралельна до прямої AC, перетинає висоту піраміди в її середині.

5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \sin y + \sin z = 3x, \\ \sin x + \operatorname{tg} y + \sin z = 3y, \\ \sin x + \sin y + \operatorname{tg} z = 3z, \end{cases}$$

якщо $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y < \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant z < \dfrac{\pi}{2}$.

6. Нехай $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$, $(b_1, b_2, \ldots, b_{10})$, $(c_1, c_2, \ldots, c_{10})$, $(d_1, d_2, \ldots, d_{10})$ — чотири перестановки чисел $1, 2, \ldots, 10$.

а) Чи може статися так, що

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{10}b_{10} = 2(c_1d_1 + c_2d_2 + \cdots + c_{10}d_{10})?$$

б) Чи може статися так, що

$$45(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{10}b_{10}) = 76(c_1d_1 + c_2d_2 + \cdots + c_{10}d_{10})?$$

7. На сторонах AB, BC, AC гострокутного трикутника ABC вибрали точки C_1, A_1, B_1 відповідно так, що $A_1B = A_1C_1$ і $A_1C = A_1B_1$. Нехай I_1 —центр кола, вписаного в трикутник $A_1B_1C_1$, а H —точка перетину висот трикутника ABC. Довести, що точки B_1, C_1, I_1 і H лежать на одному колі.

8. Дані числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n, не менші за 1, $n \geqslant 1$. Числа x_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, визначаються наступним чином:

$$x_0 = 1,\ x_k = \frac{1}{1 + a_kx_{k-1}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Нехай $A = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Довести, що

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n > \frac{n^2A}{n^2 + A^2}.$$

Автори задач: Г. В. Апостолова (11.2), А. В. Бондаренко та А. В. Примак (9.7), В. М. Лейфура (8.1, 9.1, 10.5), С. С. Лінчук, Ю. С. Лінчук (10.4), І. М. Мітельман (9.3), І. П. Нагель (8.2, 10.7), І. П. Нагель та В. М. Радченко (9.2), А. В. Примак (10.2), Ю. М. Рабинович (8.4), В. М. Радченко (11.1, 11.8), В. М. Радченко та В. А. Ясінський (11.6), В. Ф. Санніков (10.7), І. В. Федак (9.5, 10.3), Н. М. Шунда (11.5), В. А. Ясінський (8.3, 8.6, 9.4, 9.6, 10.1, 10.6, 11.3, 11.4, 11.7). Задача 8.5 не є новою.

Вказівки та розв'язання задач

8 клас

1. Відповідь: $a = \pm 1$, $a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Вказівка: зобразити графіки рівнянь системи.

2. Позначимо через S точку перетину прямих MC і AD. В трикутнику ABD точка Q є точкою перетину медіан. Оскільки $PM = MA = MB$, то $\angle MAP = \angle CDA$, а отже $MP \parallel CD$.

3. Відповідь: $m = n = 1$. Вказівка: якщо $n \geqslant 2$, то ліва частина при діленні на 4 дає в остачі 3.

4. Відповідь: Ні, не існують. Ми маємо рівняння $(l+1)(2k+l) = 2^{n+1}$, де l — кількість послідовних натуральних чисел, k — найменше з них. Далі проводимо міркування, пов'язані з парністю.

5. Після продовження сторін шестикутника отримаємо правильні трикутники, побудовані на сторонах шестикутника, та паралелограми, протилежні сторони яких містять протилежні сторони шестикутника. З рівності протилежних сторін паралелограмів маємо шукане твердження.

6. Добудуємо ще дві точки C_3 і B_3 так, щоб чотирикутники AB_1CB_3 і AC_1BB_3 були ромбами. Далі нескладно довести, що чотирикутники $C_2B_2B_3C_3$ та $AB_3A_1C_3$ є паралелограмами. Звідси випливає, що пряма AA_1 ділить навпіл B_3C_3, а отже вона ділить навпіл і B_2C_2.

9 клас

1. Відповідь: $a = \pm 1$, $a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Вказівка: зобразити графіки рівнянь системи.

2. Вказівка: довести допоміжну нерівність

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} \geqslant \frac{a+b}{2}, \quad a>0,\ b>0.$$

3. Вказівка: Довести, що навколо чотирикутника $BCFK$ можна описати коло. Для цього достатньо довести рівність кутів ABF і KCA. Далі скористатися тим, що BF є бісектрисою кута KBF.

4. Відповідь: Так, можна. Вказівка: Це можна зробити, наприклад, так, як показано на малюнку.

				·				
				·				
		-9	5	6	7	8		
		-10	-3	1	2	-5		
·	·	-11	-4	0	-1	-6	·	·
		-12	3	4	-2	-7		
		9	10	11	12	-8		
				·				
				·				

5. Доводимо, що навколо чотирикутників ABA_1B_1 і AC_1A_1C можна описати кола з діаметрами AB і AC відповідно. Звідси $\angle BAB_1 = \angle B_1A_1C$ і $\angle BA_1N = \angle BA_1C_1$. Далі встановлюємо, що $\triangle BA_1N = \triangle BA_1C_1$ і $\triangle BC_1M = \triangle BC_1A_1$. Тому $\angle MBC_1 = \angle NBA_1 = \angle C_1BA_1 = \angle ABC = 60°$. Отже $\angle MBN$ — розгорнутий.

6. Вказівка. Умову задовольняють всі натуральні числа вигляду $k = 35m - 12$, $m \in \mathbf{N}$ і тільки вони. З нерівності $k < 2002$ дістанемо $k = 35m - 12$, де $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 57$.

7. Відповідь: 4 фігурки. Використаємо шахову нумерацію клітинок. Тоді 4 фігурки з центрами в клітинках c3, c6, f3 і f6 задовольняють умову задачі. Якщо випиляно меншу кількість фігурок, то кожна з випиляних фігурок матиме спільні клітинки не більше, ніж з однією з фігурок, центри яких — клітинки b2, b7, g2, g7. Тому одну з цих чотирьох фігурок ще можна випиляти.

8. Вказівка. Доводимо, що коли множину чисел $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots, 1999\}$ розбити на дві групи згідно з умові задачі, то сума всіх чисел однієї групи буде дорівнювати сумі всіх чисел другої. Далі, доповнюючи групи числами 2000, 2001 і 2002, одержимо, що шукана різниця буде дорівнювати -2001. Відповідь: -2001.

10 клас

1. $\sqrt{3+2000x} + 9 < 4x^2 + \sqrt{2002x} \;\Leftrightarrow$

$$3 - 2x < (2x-3)(2x+3)(\sqrt{3+2000x} + \sqrt{2002x}) \;\Leftrightarrow$$

$$0 < (2x-3)((2x+3)(\sqrt{3+2000x} + \sqrt{2002x}) + 1) \;\Leftrightarrow 2x - 3 > 0 \;\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$

Відповідь: $(1,5;\ +\infty)$.

2. Нехай p, q – степені, a_p, b_q – коефіцієнти при старших степенях многочленів $P,\ Q$. Послідовно підставляємо $y = 0,\ x = 0$ і отримуємо $2p = 2q$,

$a_p^2 = b_q$, $a_p = b_q^2$, звідки $p = q$, $a_p = b_q = 1$. Нехай $p = q = k$. Покладемо $P_1(x) = P(x) - x^k$, $Q_1(x) = Q(x) - x^k$. Нехай p_1, q_1 – степені цих многочленів. Після підстановки у початкову рівність маємо:

$$(P_1(x))^2 + 2P_1(x)x^k + (Q_1(y))^2 + 2Q_1(y)y^k = P_1(y^2) + Q_1(x^2).$$

Якщо многочлени P_1 та Q_1 не тотожні нулі, то маємо такі співвідношення для степенів: $p_1 + k = 2q_1$, $q_1 + k = 2p_1$, звідки $k = p_1 + q_1$. Протиріччя з тим, що $0 \le p_1 < k$ і $0 \le q_1 < k$. Якщо тільки P_1 тотожньо дорівнює 0, то $k = q_1$ і знову протиріччя. Отже, $P_1 \equiv 0$, $Q_1 \equiv 0$. Тому $P(x) = x^k$, $Q(y) = y^k$, де k – натуральне число. Відповідь: $(x^k,\ y^k),\ \ k \in \mathbf{N}$.

3. Проводимо діаметр AF. Оскільки трикутник ABC гострокутний, то AF перетинає BC. Проведемо $EF \parallel AC$. Далі $B \in \smile EF$, бо у протилежному випадку $\angle BAC \ge 90^\circ$. Нехай $BN \perp AC$, $M = EF \cap BN$. Тоді

$$S_{AEBF} = S_{EBF} + S_{AEF} = \frac{1}{2}BM \cdot EF + \frac{1}{2}EF \cdot AE = \frac{1}{2}AC \cdot BN = S_{ABC}.$$

Нехай точки B_1, E_1 симетричні точкам B, E відносно діаметра AF. Шестикутник $AEBFB_1E_1$ – шуканий.

4. Нехай

$$1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_k \le n, \quad k = k(n).$$

Ясно, що $a_1 \le n-k+1$, $a_2 \le n-k+2$. Покладемо $s = a_1 + a_2$; $b_i = s + a_i$, $3 \le i \le k$. Далі, $a_4 \ge a_3 + 1 \ge a_2 + 2 \ge a_1 + 3 \to a_4 \ge \dfrac{s+5}{2}$ Таким чином, числа $a_4, a_5, \ldots, a_k$ і $b_3, b_4, \ldots b_k$ потрапляють на відрізок $\left[\dfrac{s+5}{2}, n+s\right]$. Всього чисел $2k-5$. Довжина відрізка $n+s-\dfrac{s+5}{2} \le n+\dfrac{2n-2k+3}{2}-\dfrac{5}{2} = 2n-k-1$. Тому відрізок $\left[\dfrac{s+5}{2}, n+s\right]$ містить щонайбільше $2n-k$ цілих точок. Але $2k-5 > 2n-k$. Отже, існують натуральні числа $j,\ 4 \le j \le k$ та $i,\ 3 \le i \le k$ такі, що $a_j = s + a_i$, тобто $a_j = a_1 + a_2 + a_i$. Для числа $k = \left[\dfrac{2}{3}(n+1)\right] + 1$ твердження задачі не виконується, оскільки для набору $n-k+1$, $n-k+2$, $\ldots$, n сума трьох найменших з цих чисел більша за n.

5. Позначимо: $CM = m,\ AC = b,\ CB = a,\ BA = c,\ \angle A = \alpha, \angle B = \beta$. Маємо

$$4m^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2, \quad \frac{4m^2}{b^2} = 2 + \frac{2a^2}{b^2} - \frac{c^2}{b^2}.$$

Оскільки $\alpha = 2\beta$, то

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta}, \quad \frac{c}{b} = \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}.$$

Тому $\dfrac{4m^2}{b^2} = 2 + \dfrac{2\sin^2 2\beta}{\sin^2\beta} - \dfrac{\sin^2 3\beta}{\sin^2\beta} = 2 + 8\cos^2\beta - (3 - 4\sin^2\beta)^2 = 2 + 4(1 + \cos\alpha) - (1 + 2\cos\alpha)^2 = 5 - 4\cos^2\alpha$.

6. Маємо:

$$n + \left[[n\sqrt{2}]\sqrt{2}\right] = 2[n\sqrt{2}] \quad (1)$$

Числа виду $m\sqrt{2}$, де $m \in \mathbf{Z}$, не є цілими. Якщо, $x \notin \mathbf{Z}$, то $x - 1 < [x] < x$.

Тому для всіх натуральних n

$$n\sqrt{2} - 1 < [n\sqrt{2}] < n\sqrt{2}, \quad 2n - \sqrt{2} < \sqrt{2}[n\sqrt{2}] < 2n.$$

Якщо $2n - \sqrt{2} < [n\sqrt{2}]\sqrt{2} < 2n - 1$, то $\left[[n\sqrt{2}]\sqrt{2}\right] = 2n - 2$ Враховуючи (1), маємо $2[n\sqrt{2}] = 3n - 2$. Далі, $[n\sqrt{2}]\sqrt{2} < 2n - 1$, $2[n\sqrt{2}] < 2\sqrt{2}n - \sqrt{2}$. Тобто, $3n - 2 < 2\sqrt{2}n - \sqrt{2}$, звідки $n < 3,5$. Отже, $n \in \{1, 2, 3\}$. Перевірка дає, що $n = 2$.

Якщо $2n - 1 < [n\sqrt{2}]\sqrt{2} < 2n$, то $\left[[n\sqrt{2}]\sqrt{2}\right] = 2n - 1$ і з (1) отримуємо $3n - 1 = 2[n\sqrt{2}]$. Але, $2\sqrt{2}n - \sqrt{2} < 2[n\sqrt{2}] < 2\sqrt{2}n$, звідки $3n - 1 < 2\sqrt{2}n$ і $n < 6$. Перевірка дає що $n = 1,\ 3,\ 5$. Відповідь: $n \in \{1, 2, 3, 5\}$.

7. Нехай I – центр вписаного кола, $M = BI \cap C_1A_1$. Підрахунком кутів легко довести, що $BI \perp C_1A_1$, $AI \perp C_1B_1$, $CI \perp A_1B_1$. Оскільки A_2, B_2, C_2 – точки дотику вписаного кола, то $AI \perp C_2B_2$, $CI \perp A_2B_2$, $BI \perp A_2C_2$, звідки $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$. Нехай $A_1A_2 \cap C_1C_2 = O$. Оскільки $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$, то O – центр гомотетії, точки O, B_1, B_2 лежать на одній прямій.

8. Підставляємо у нерівність $x = y = z$ і отримуємо

$$\frac{1}{9z^2} + \frac{3}{z^2} = \frac{28}{9z^2} \geq \frac{K}{\sqrt{3}z^2}$$

звідки $K \leq K_0 = \dfrac{28\sqrt{3}}{9}$. Доведемо, що при $K = K_0$ нерівність виконується для всіх додатних x, y, z.

Застосовуємо нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним і отримуємо:

$$\frac{1}{(x+y+z)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{9}\left(\frac{9}{(x+y+z)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) + \frac{8}{9}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \geq \frac{4}{9}\sqrt[4]{\frac{9}{(x+y+z)^2x^2y^2z^2}} + \frac{8}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2z^2}} \geq \frac{28\sqrt{3}}{9\sqrt{xyz(x+y+z)}}$$

Остання нерівність еквівалентна нерівностям

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2z^2}} \geq \sqrt{\frac{3}{xyz(x+y+z)}}, \quad \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

11 клас

1. Відповідь: $m = n = 0$. Якщо $m \neq 0$, то поділивши обидві частини на m^{2002}, отримаємо ($x = n/m$):

$$x^{2002} - (1+x)(1+2x)\cdots(1+2001x) = 0.$$

Якщо x — раціональний корінь лівої частини, то $x = \pm 1$. Але такі значення не задовольняють рівність. Отже, інших розв'язків немає.

2. Нехай ми маємо k дільників. До кожного дільника d, відмінного від $\sqrt{n}$, приставимо до пари дільник n/d. Тоді $d + n/d \geqslant 2\sqrt{n}$, і сума всіх дільників не менша за $k\sqrt{n}$. Оскільки $d + n/d \leqslant (n+1) \Leftrightarrow (d-1)(d-n) \leqslant 0$, сума всіх дільників буде не більша за $k\dfrac{n+1}{2}$. Звідси отримаємо твердження задачі.

3. Нехай a_n — кількість вказаних фарбувань правильного n-кутника. Неважко бачити, що

$$a_1 = 0,\ a_2 = k(k-1),\ a_n = (k-2)a_{n-1} + (k-1)a_{n-2}.$$

(Перший доданок останньої рівності дорівнює кількості розфарбувань n-кутника, при яких кольори 1-ої та $(n-1)$ сторін різні, другий — коли вони однакові). Звідси індукцією легко довести, що $a_n = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$. Для простих $p > 2$ маємо $a_p = (k-1)((k-1)^{p-1} - 1)$, що ділиться на $(k-1)p$ за малою теоремою Ферма.

4. Відмітимо на продовженні відрізка BC за точку B таку точку K, що $BK = AB$. З рівності $\triangle SAB = \triangle SKB$ маємо $SA = SK$ і, таким чином, основа O висоти піраміди лежить на бісектрисі кута ABK, тому $BL \parallel AC$. Нехай Q — точка перетину діагоналей $ABCD$, α — площина, що проходить через пряму DM паралельно AC, M_1 — точка перетину α і прямої SB. З теореми Фалеса випливає, що пряма DM_1 ділить SQ у відношенні $2:1$, тому DM_1 — медіана $\triangle SDB$. Але за теоремою Фалеса α ділить SO у тому ж відношенні, що й SB, тобто навпіл.

5. Відповідь: $(0,0,0)$. Неважко переконатися, що $2\sin t + \operatorname{tg} t \geqslant 3t$ для всіх $t \in [0, \dfrac{\pi}{2})$, причому знак рівності досягається лише при $t = 0$. З нашої системи маємо

$$(2\sin x + \operatorname{tg} x) + (2\sin y + \operatorname{tg} y) + (2\sin z + \operatorname{tg} z) = 3(x+y+z),$$

що можливе лише у випадку $x = y = z = 0$.

6. а)Відповідь: ні. Як відомо,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_{10} b_{10} \leqslant 1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 = 385,$$
$$c_1 d_1 + c_2 d_2 + \cdots + c_{10} d_{10} \geqslant 1 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + \cdots + 10 \cdot 1 = 220.$$

б)Відповідь: так. Наприклад, для наборів

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{10}) = (1, 2, \ldots, 10), \ (c_1, c_2, \ldots, c_{10}) = (10, 9, \ldots, 1),$$
$$(b_1, b_2, \ldots, b_{10}) = (d_1, d_2, \ldots, d_{10}) = (2, 1, 4, 3, \ldots, 10, 9)$$

права і ліва частини бажаної рівності відповідно дорівнюють $45 \cdot 5$ і $76 \cdot 5$.

7. Доведемо, що коло, описане навколо $\triangle B_1 A C_1$, проходить через точки I_1 і H. Простим підрахунком кутів переконуємося, що точка I_1 належить цьому колу. Далі, нехай O і O_1 — центри кіл, описаних навколо трикутників ABC і $A_1 B_1 C_1$ відповідно. Тоді $\vec{O_1 A_1} = \vec{AO}$, а тому $A_1 O_1 A O$ — паралелограм. Опустимо перпендикуляри $O_1 K$ і OM на AH і BC відповідно. Тоді $\triangle A_1 O M = \triangle O_1 A K$, звідки $OM = AK$. Але H — ортоцентр $\triangle ABC$, тому $OM = \dfrac{1}{2} AH$, тобто K — середина відрізка AH, і тому $O_1 A = O_1 H$. Твердження доведене.

8. Нехай $y_k = 1/x_k$, тоді $y_k = 1 + a_k / y_{k-1} \leqslant a_k + 1/y_{k-1}$. Тому

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y_{k-1}} < A + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y_k}.$$

Але

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \geqslant \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{y_k}}.$$

Позначивши $t = \sum_{k=1}^{n} x_k$, маємо

$$\frac{n^2}{t} < A + t \iff t^2 + At - n^2 > 0 \iff$$
$$t > \frac{-A + \sqrt{A^2 + 4n^2}}{2} = \frac{2n^2}{\sqrt{A^2 + 4n^2} + A} \geqslant \frac{2n^2}{A + \dfrac{2n^2}{A} + A} = \frac{n^2 A}{n^2 + A}.$$

Відбірково-тренувальні збори команди України по підготовці до 43-ої Міжнародної математичної олімпіади

На заключному етапі Всеукраїнської олімпіади юних математиків було визначено коло кандидатів до команди, що буде представляти нашу країну на 43-ій Міжнародній математичній олімпіаді. На відбірково-тренувальні збори були запрошені учні С. Аввакумов (м. Севастополь), А. Анікушин та Є. Рисай (УФМЛ), М. Васильків (м. Львів), К. Веденський, Ю. Карташов, С. Олефіренко, О. Рибак та А. Шерстюк (всі — м. Київ), С. Володько (м. Краматорськ, Донецька обл.), А. Дудко та А. Ткачук (м. Харків), Т. Матохнюк та С. Мельниченко (м. Вінниця), М. Рибак (м. Миколаїв).

Збори проходили з 7 по 16 травня на базі Українського фізико-математичного ліцею. Склад нашої команди було визначено за підсумками чотирьох відбіркових турів, в кожному з яких було запропоновано три задачі та надано чотири з половиною години на їх розв'язання — в точній відповідності з регламентом міжнародних олімпіад.

За підсумками змагання до складу команди пройшли С. Володько, А. Дудко, Т. Матохнюк, С. Мельниченко, М. Рибак та О. Рибак.

Після відбіркових турів для всіх учасників зборів викладачами В. В. Думою (м. Київ), В.М. Лейфурою (м. Миколаїв), І.М. Мітельманом (м. Одеса) та В.А. Ясінським (м. Вінниця) були прочитані лекції з різних питань олімпіадної математики.

Завдання відбіркових олімпіад

1. Нехай p — дане непарне просте число, $\mathbf{Z}$ позначає множину всіх цілих чисел. Знайдіть всі функції $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ такі, що одночасно виконуються умови:

(i) якщо $m - n$ ділиться на p, то $f(m) = f(n)$, $m,\ n \in \mathbf{Z}$;

(ii) $f(mn) = f(m)f(n)$ для всіх $m,\ n \in \mathbf{Z}$.

2. Нехай ω — коло, описане навколо трикутника ABC. Бісектриса кута $\angle BAC$ перетинає ω в точці W, $W \neq A$. На колі ω відмітили точки M та N так, що $BM \parallel AW \parallel CN$, промені BM та CN напрямлені протилежно до променя AW. Нехай O_1, O_2, O_3, O_4 — центри кіл, вписаних в трикутники AMB, ABW, ACW, ACN відповідно. Доведіть, що $O_1O_3 = O_2O_4$.

3. Знайдіть всі натуральні $n \geqslant 2$ та набори натуральних чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ такі, що

$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

де $a_0 = 1$ та $(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geqslant a_k^2(a_k - 1)$ для $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$.

4. Знайдіть найбільше можливе значення виразу

$$\frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2} + \frac{3}{z^2},$$

де $x,\ y,\ z$ — додатні дійсні числа, для яких виконуються умови

$$\frac{1}{2}\min\{x\sqrt{2},\ y\sqrt{3}\} > z \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$x + z\sqrt{3} \geqslant \sqrt{6},$$
$$y\sqrt{3} + z\sqrt{10} \geqslant 2\sqrt{5}.$$

5. Дане натуральне число n. Розглядаються перестановки $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2n})$ множини $(1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$ такі, що всі числа $|a_{i+1} - a_i|$, $1 \leqslant i \leqslant 2n-1$, різні.

Доведіть, що $a_1 - a_{2n} = n$ тоді і тільки тоді, коли $1 \leqslant a_{2k} \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

6. Дано гострокутний трикутник ABC. Нехай DAC, EAB, FBC — рівнобедрені трикутники, побудовані зовнішнім чином на сторонах трикутника ABC так, що $DA = DC$, $EA = EB$, $FB = FC$ та

$$\angle ADC = 2\angle BAC, \quad \angle BEA = 2\angle ABC, \quad \angle CFB = 2\angle ACB.$$

Нехай D' — це точка перетину прямих DB та EF, E' — прямих EC та DF, F' — прямих FA та DE. Знайдіть значення суми

$$\frac{DB}{DD'} + \frac{EC}{EE'} + \frac{FA}{FF'}.$$

7. В трьох школах вчаться по 200 учнів. Кожний учень має хоча б по одному другу в кожній з трьох шкіл (якщо учень A є другом B, то B є другом A). Відомо, що існує множина E з 300 учнів (вибраних з вказаних вище 600) така, що для кожної школи S та будь-яких двох учнів $x,\ y \in E$; $x,\ y \notin S$, кількість друзів x серед учнів S та кількість друзів y серед учнів S є різними. Доведіть, що можна вибрати трьох учнів з трьох різних шкіл таких, що вони є друзями один одного.

8. Дано трикутник ABC з центром вписаного кола I. Це вписане коло дотикається сторін AB та BC в точках K та P відповідно. Бісектриси кутів $\angle BAC$, $\angle ACB$ та медіана трикутника ABC, проведена з вершини B, перетинають відрізок KP в точках R, Q та M відповідно. Позначимо через S точку перетину прямих AQ та CR. Доведіть, що точки S, M та I лежать на одній прямій.

9. Нехай $n \geqslant 3$ — натуральне число, $A = \{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n\}$ — множина з n різних цілих чисел, m — найменший елемент A, M — найбільший елемент A. Припустимо, що існує многочлен з цілими коефіцієнтами $P(x)$ такий, що $m < P(a) \leqslant M$ для всіх $a \in A$ та $P(m) < P(a)$ для всіх $a \in A,\ a \neq m,\ M$.

Доведіть, що $n \leqslant 5$ та існують цілі числа b та c такі, що кожний елемент A задовольняє рівність $P(x) + x^2 + bx + c = 0$.

10. Всередині опуклого чотирикутника $O_1O_2O_3O_4$ взято точку P. Для кожного $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ розглянемо прямі l, що проходять через P та перетинають два промені O_iO_{i-1}, O_iO_{i+1} в різних точках $A_i(l),\ B_i(l)$ відповідно (тут $O_0 = O_4,\ O_5 = O_1$). Розглянемо величину $f(l) = PA_i(l) \cdot PB_i(l)$, і позначимо через l_i пряму, для якої $f(l)$ приймає для даного фіксованого i найменше значення. Відомо, що $l_1 = l_3,\ l_2 = l_4$. Доведіть, що $O_1O_2O_3O_4$ — паралелограм.

11. Нехай $n \geqslant 3$ — натуральне число, $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ — попарно різні (тобто неспівпадаючі) підмножини множини $S = \{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n\}$. Доведіть, що існує елемент $x \in S$ такий, що попарно різними є підмножини

$$A_1 \setminus \{x\},\ A_2 \setminus \{x\},\ \dots,\ A_n \setminus \{x\}.$$

12. Дано дійсні числа $a,\ b,\ c$, всі відмінні від нуля, такі, що

$$a^2 = c^3 - c^2 + cb^2, \quad b^2 = a^3 - a^2 + ac^2, \quad c^2 = b^3 - b^2 + ba^2.$$

Доведіть, що

$$\frac{a^2+b^2}{2a^5+2b^5+a^2+b^2} + \frac{b^2+c^2}{2b^5+2c^5+b^2+c^2} + \frac{c^2+a^2}{2c^5+2a^5+c^2+a^2} \leqslant 1.$$

Розв'язання задач

1. Маємо $f(0) = f(0)f(n)$, $n \in \mathbf{Z}$. Тому $f(0) = 0$ або $f(0) = f(n) = 1$.

Якщо f — константа, то $f(n) = 0$ або $f(n) = 1$.

Нехай f — не константа. Тоді $0 = f(0) = f(kp)$, $k \in \mathbf{Z}$. Звідси, з малої теореми Ферма та умови задачі отримуємо, що $f(m) = f(m^p) = f(m)^p$, $m \in \mathbf{Z}$. Тому $f(m) = 0, \pm 1$. Нехай a — примітивний корінь p (таке число, що в послідовності a^n зустрічаються всі остачі при діленні на p). Тоді $f(a) \neq 0$, інакше f була б константою. Тому $f(a) = \pm 1$.

Якщо $f(a) = 1$, то $f(n) = 1$ для всіх n, не кратних p, $f(kp) = 0$.

Якщо $f(a) = -1$, то знову $f(kp) = 0$, $f(n) = 1$ для всіх n, що за модулем p дорівнюють квадрату деякого відмінного від нуля цілого числа, $f(n) = -1$ для інших n. (Іншими словами, це значення символу Лежандра).

2. *Лема.* Нехай $ABCD$ — рівнобедрена трапеція, в якій $AD \parallel BC$, $AB = CD$, O_1 та O_2 центри вписаних кіл трикутників ACD та BCD відповідно. Тоді

1) $O_1O_2 \perp AD$,

2) $O_1O_2 = 4R\sin^2\dfrac{\angle CAD}{2}$, де R — радіус описаного кола трапеції $ABCD$.

Доведення леми. Нехай $\varphi = \angle CAD$, S — це точка перетину прямих CO_2 та DO_1. Тоді

$$\angle CSD = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ADC + \angle BCD) = 90^\circ,$$

$$\angle CO_1D = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle CAD = 90^\circ + \frac{\varphi}{2} = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle CBD = \angle CO_2D$$

(адже O_1 та O_2 — центри вписаних кіл). Тому точки D, O_1, O_2, C лежать на одному колі. Також

$$\angle CO_1S = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\varphi}{2}\right), \quad \angle SCO = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varphi}{2}.$$

1) Нехай T — точка перетину O_1O_2 та AD. Тоді

$$\angle TO_1D + \angle TDO_1 = \angle SCD + \angle SDC = 90^\circ, \quad O_1O_2 \perp AD.$$

2) $CD = 2R\sin\varphi$, $CD = 2r\sin(90^\circ + \dfrac{\varphi}{2} = 2r\sin\dfrac{\varphi}{2}$, де r — радіус описаного кола чотирикутника DO_1O_2C. Тому

$$r = 2R\sin\frac{\varphi}{2}, \quad O_1O_2 = 2r\sin\angle O_1CO_2 = 4R\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = 4R\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Лема доведена.

Розв'язання задачі. Нехай O_5 та O_6 — центри вписаних кіл трикутників AMW та CNW відповідно. Тоді за лемою $O_1O_5 \perp AW$, $O_3O_6 \perp$

AW, $O_1O_5 \parallel O_3O_6$. Також $O_1O_5 = 4R\sin^2\dfrac{\angle BAC}{4} = O_3O_6$, тому $O_1O_5O_6O_3$ є паралелограмом, $O_5O_6 = O_1O_3$. Але $O_2O_4 = O_5O_6$, бо ці відрізки симетричні відносно прямої, яка є серединним перпендикуляром відрізка WA. Тому $O_1O_3 = O_2O_4$.

3. З умови задачі маємо, що $1 > \dfrac{a_{k-1}}{a_k}$, $a_k > a_{k-1}$ і тому $a_k \geqslant 2$ для $k \geqslant 1$. Нерівність умови може бути переписана у вигляді

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} + \frac{a_k}{a_{k+1}-1} \leqslant \frac{a_{k-1}}{a_k - 1}.$$

Додаючи ці нерівності для $k = i,\ i+1,\ \ldots,\ n-1$, разом з очевидною нерівністю $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} < \dfrac{a_{n-1}}{a_n - 1}$ отримаємо:

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{a_i}{a_{i+1}-1}. \tag{1}$$

Тепер ми визначимо $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$. З умови задачі та нерівності (1) для $i = 0$ маємо, що $\dfrac{1}{a_1} \leqslant \dfrac{99}{100} < \dfrac{1}{a_1 - 1}$. Тому $a_1 = 2$. Для $i = 1$ аналогічно отримуємо, що

$$\frac{1}{a_2} \leqslant \frac{1}{a_1}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{a_1}\right) < \frac{1}{a_2 - 1},$$

тому $a_2 = 5$. Повторюючи ці міркування при $i = 2$ та $i = 3$ знаходимо, що $a_3 = 56$ та $a_4 = 25 \cdot 56^2 = 78400$. Але тоді для $i = 5$ отримаємо, що $a_5 < 0$. Визначені чотири числа задовольняють всі умови задачі і є єдиним розв'язком.

4. Позначимо

$$a = \frac{1}{x\sqrt{2}}, \quad b = \frac{1}{y\sqrt{3}}, \quad c = \frac{1}{2z}.$$

Тоді маємо, що треба знайти найбільше значення виразу

$$Q(a,\ b,\ c) = 2a^2 + 6b^2 + 12c^2,$$

де

$$\max\{a,\ b\} < c \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{1}$$

$$c\sqrt{2} + a\sqrt{3} \geqslant 2\sqrt{6}ac, \tag{2}$$

$$c\sqrt{2} + b\sqrt{5} \geqslant 2\sqrt{10}bc. \tag{3}$$

З (2) отримуємо, що

$$\frac{\sqrt{2}}{a} + \frac{\sqrt{3}}{c} \geqslant 2\sqrt{6} \Rightarrow \frac{2}{a^2} + \frac{3}{c^2} \geqslant 12 \Rightarrow \frac{1}{6}a^2\left(\frac{2}{a^2} + \frac{3}{c^2}\right) \geqslant 2a^2.$$

Звідси

$$a^2+c^2=2a^2+c^2-a^2\leqslant \frac{1}{6}a^2\left(\frac{2}{a^2}+\frac{3}{c^2}\right)+c^2\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)\leqslant$$
$$\frac{1}{6}a^2\left(\frac{2}{a^2}+\frac{3}{c^2}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)=\frac{5}{6}.$$

Аналогічно з (1) та (3) отримуємо, що $b^2+c^2\leqslant\frac{7}{10}$. Тому

$$Q(a,\ b,\ c)=2(a^2+c^2)+6(b^2+c^2)+4c^2\leqslant\frac{118}{15}.$$

Легко перевірити, що $Q\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{118}{15}$, і значення $a=\frac{1}{\sqrt{3}},\ b=\frac{1}{\sqrt{5}},\ c=\frac{1}{\sqrt{2}}$ задовольняють умови задачі. Відповідь: 118/15.

5. Відмітимо, що $1\leqslant|a_{i+1}-a_i|\leqslant 2n-1$, і якщо всі вони різні, то вони по одному разу приймають всі значення від 1 до $2n-1$.

Перевіримо достатність вказаної умови. Якщо всі $1\leqslant a_{2k}\leqslant n$, то всі числа в перестановці, більші за n, мають непарні номери. Тому

$$T=\sum_{i=1}^{2n-1}|a_{i+1}-a_i|=2(a_1+a_3+\dots+a_{2n-1})-2(a_2+a_4+\dots+a_{2n})+$$
$$a_{2n}-a_1=2((n+1)+(n+2)+\dots+2n)-2(1+2+\dots+n)+a_{2n}-a_1=$$
$$2n^2+a_{2n}-a_1.$$

З іншого боку, $T=1+2+\dots+2n-1=2n^2-n$. Тому $a_1-a_{2n}=n$.

Покажемо необхідність умови. Маємо, що $a_1-a_{2n}=n$ і

$$T_0=\sum_{i=1}^{2n-1}|a_{i+1}-a_i|+a_1-a_{2n}=2n^2-n+n=2n^2.$$

Також $T_0=\sum_{i=1}^{2n}\delta_i a_i$, де $\delta_i\in\{-2,\ 0,\ 2\}$ і при цьому:

(i) $\sum_{i=1}^{2n}\delta_i=0$;

(ii) якщо з послідовності $\delta_1,\ \delta_2,\ \dots,\ \delta_{2n}$ прибрати всі нулі, то числа 2 та -2 будуть в ній чередуватися.

Тому

$$T_0=\sum_{i=1}^{2n}\delta_i a_i=\sum_{i=1}^{2n}\delta_i(a_i-n)\leqslant 2n^2.$$

Тут ми використали, що різниці a_i-n приймають значення $1-n,\ 2-n,\ \dots,\ n$ і найбільше значення T_0 ми отримуємо, якщо $\delta_i=-2$ при $a_i<n$ та $\delta_i=2$

при $a_i > n$. Оскільки $a_1 - a_{2n} = n$, буде $a_1 > n$, $\delta_1 = 2$, і всі $\delta_{2i-1} = 2$. Тоді $\delta_{2i} = -2$ і тому a_{2i} не можуть перевищувати n.

6. Відмітимо, що $\angle ADC$, $\angle BEA$, $\angle CFB < \pi$, оскільки трикутник ABC гострокутний. Також

$$\angle DAC = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle ADC}{2} = \frac{\pi}{2} - \angle BAC, \quad \angle BAE = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BEA}{2} = \frac{\pi}{2} - \angle ABC.$$

Тому

$$\angle DAE = \angle DAC + \angle BAC + \angle BAE = \pi - \angle ABC < \pi.$$

Аналогічно $\angle EBF < \pi$, $\angle FCD < \pi$. Значить, шестикутник $DAEBFC$ — опуклий, і в ньому

$$\angle ADC + \angle BEA + \angle CFB = 2(\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB) = 2\pi.$$

Розглянемо три кола з центрами D, E, F та радіусами DA, EB, FC відповідно. Оскільки $\angle ADC + \angle BEA + \angle CFB = 2\pi$, легко показати, що три вказані кола перетинаються в одній точці. Позначимо цю точку через O. Тоді O є образом точки C при симетрії відносно прямої DF, образом точки A при симетрії відносно прямої DE та образом точки B при симетрії відносно прямої EF. Позначаючи через $S(XYZ)$ площу трикутника XYZ, маємо:

$$\frac{DB}{DD'} = \frac{DD' + D'B}{DD'} = 1 + \frac{D'B}{DD'} = 1 + \frac{S(EBF)}{S(DEF)} = 1 + \frac{S(OEF)}{S(DEF)}.$$

Аналогічно

$$\frac{EC}{EE'} = 1 + \frac{S(ODF)}{S(DEF)}, \quad \frac{FA}{FF'} = 1 + \frac{S(ODE)}{S(DEF)}.$$

Тому шукане значення дорівнює 4.

7. Нехай A, B, C — множини студентів вказаних шкіл, $A_1 = A \cap E$, $B_1 = B \cap E$, $C_1 = C \cap E$, через $|D|$ будемо позначати кількість елементів множини D. Оскільки $|A_1| + |B_1| + |C_1| = 300$, ми можемо вважати, що $|A_1| \leqslant 100$, тоді $|B_1| + |C_1| \geqslant 200$. Для учня $x \in B_1 \cup C_1$ позначимо через $n(x)$ кількість друзів x в множині A. Коли x пробігає множину $B_1 \cup C_1$, всі кількості $n(x)$ попарно різні, і тому існує x з $n(x) \geqslant 200$. Позначимо цього учня через b. Оскільки в A всього 200 учнів, всі учні A будуть друзями B. $n(b) \leqslant 200$, і тому $n(b) = 200$. Тепер досить взяти $c \in C$, який є другом b та $a \in A$, що є другом c (такі учні існують, оскільки кожний учень має друга в кожній школі). Трійка a, b, c є шуканою.

8. Ми покажемо, що $MI \perp AC$ та $SI \perp AC$ звідки випливатиме твердження задачі.

Нехай BL — медіана трикутника ABC, пряма NT проходить через точку L паралельно KP, точки N та T лежать на прямих AB та BC

відповідно. Через O позначимо точку перетину прямих BI та серединного перпендикуляру до відрізка AC. Тоді точки $A,\ B,\ C,\ O$ лежать на одному колі (описаному колі трикутника ABC). Маємо, що

$$BI \perp KP \Rightarrow BI \perp NT,\ \angle BNT = \angle BTN,\ \angle BNT = \angle A + \angle NLA,$$
$$\angle IOL = \angle TLC = \angle ALN = \frac{1}{2}\left|\angle A - \angle C\right|.$$

Також $\angle A = \angle BOC$, тому $\angle LOC = \angle LOI + \angle BOC = \angle NLA + \angle BAL = \angle BNL = \angle BTL$. Значить, точки $L,\ T,\ C,\ O$ лежать на одному колі. Тому $\angle OTB = 90^\circ,\ IP \parallel OT,\ \dfrac{BI}{IO} = \dfrac{BP}{PT} = \dfrac{BM}{ML}$. Звідси маємо, що $LO \parallel MI,\ MI \perp AC$.

Також маємо, що $\angle BKP = 90^\circ - \dfrac{\angle B}{2} = \dfrac{\angle A}{2} + \dfrac{\angle C}{2} = \angle QIA$. Тому на одному колі лежать точки $A,\ K,\ Q,\ I$, маємо $\angle AKI = 90^\circ \Rightarrow \angle AQI = 90^\circ$. Аналогічно $\angle ARC = 90^\circ$, I є точкою перетину висот трикутника ASC, тому $SI \perp AC$.

9. Ціле число $P(M) - P(m)$ ділиться на $M - m$. Оскільки всі $m < P(a) \leqslant M$, буде $P(M) - P(m) < M - m$. Тому $P(M) = P(m)$.

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $m = a_1 < a_2 < \dots < a_n = M$. Також $P(a_1) = P(a_n)$, тому

$$P(x) = P(a_1) + (x - a_1)(x - a_n)G(x),$$

$G(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами. Відмітимо, що

$$G(a) = \frac{P(a) - P(a_1)}{(a - a_1)(a - a_n)} < 0, \quad a \in A \setminus \{a_1,\ a_n\}.$$

Припустимо, що $n \geqslant 6$. Тоді існує елемент $a \in A$ такий, що $M - a \geqslant 2$ та $a - m \geqslant 3$. Тоді

$$G(a) = \frac{P(a) - P(a_1)}{(a - a_1)(a - a_n)} > \frac{M - m}{(a - m)(a - M)} =$$
$$\frac{M - a + a - m}{(a - m)(a - M)} = -\frac{1}{a - m} - \frac{1}{M - a} > -1.$$

Ми отримали суперечність. Тому $n \leqslant 5$.

Оскільки для кожного $a \in A \setminus \{a_1,\ a_n\}$

$$a_n - a_1 = M - m > P(a) - P(a_1) = (a - a_1)(a - a_n)G(a),$$

з урахуванням того, що $(a-a_1)(a-a_n)<0$ маємо, що

$$G(a) > \frac{a_n-a_1}{(a-a_1)(a-a_n)} = -\frac{(a-a_1)+(a_n-a)}{(a-a_1)(a_n-a)} \geqslant \\ -\frac{(a-a_1)(a_n-a)+1}{(a-a_1)(a_n-a)} \geqslant -2.$$

Значить, $G(a)=-1$ для всіх $a \in A \setminus \{a_1,\ a_n\}$. Тому $G(x) = -1+(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_{n-1})H(x)$, де $H(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами. Звідси

$$P(x)-P(a_1) = (x-a_1)(x-a_n)G(x) = -(x-a_1)(x-a_n)+ \\ (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)H(x).$$

Залишається покласти $x^2+bx+c = (x-a_1)(x-a_n)-P(a_1)$.

10. Спочатку покажемо, що для кожного i прямою l_i буде така, що $O_iA_i = O_iB_i$ (далі такі точки $A_i,\ B_i$ розглядаємо). Нехай пряма l проходить через P, перетинає $O_iO_{i-1},\ O_iO_{i+1}$ в точках $C_i,\ D_i$ відповідно, $C_i \neq A_i,\ D_i \neq B_i$. Візьмемо точки $E_i,\ F_i$ на променях $O_iO_{i-1},\ O_iO_{i+1}$ відповідно такі, що $O_iD_i = O_iE_i$ та $O_iC_i = O_iF_i$. Тоді чотирикутник $C_iF_iD_iE_i$ є рівнобедреною трапецією, навколо неї можна описати коло, і тоді $PA_i \cdot PB_i < PC_i \cdot PD_i$.

З вищедоведеного та умови $l_1 = l_3$, підраховуючи кути, знаходимо, що

$$\angle O_1O_2O_3 = \angle O_1A_1B_1 + \angle O_3A_3B_3 = \angle O_1B_1A_1 + \angle O_3B_3A_3 = \angle O_3O_4O_1.$$

Аналогічно з умови $l_2 = l_4$ знаходимо, що

$$\angle O_2O_3O_4 = \angle O_2A_2B_2 + \angle O_4A_4B_4 = \angle O_2B_2A_2 + \angle O_4B_4A_4 = \angle O_4O_1O_2.$$

Тому $O_1O_2O_3O_4$ — паралелограм.

11. Припустимо, що для будь-якого елемента $x \in S$ серед множин

$$A_1 \setminus \{x\},\ A_2 \setminus \{x\},\ \dots,\ A_n \setminus \{x\}.$$

є дві однакові.

Припустимо, що для деякого $x \in S$

$$A_i \setminus \{x\} = A_j \setminus \{x\} = A_k \setminus \{x\}.$$

Тоді серед множин $A_i,\ A_j,\ A_k$ дві однакові, що суперечить умові. Отже, у вказаному наборі множин для кожного $x \in S$ не буде трьох однакових підмножин, можливо буде кілька пар попарно рівних підмножин. Для кожного x зафіксуємо для подальшого розгляду рівно одну таку пару.

Розглянемо граф з вершинами $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$. Вершини A_i та A_j з'єднуємо ребром тоді і тільки тоді, коли для деякого $x \in S$ $A_i \setminus \{x\} = A_j \setminus \{x\}$

і ця пара раніше була зафіксована (легко побачити, що для кожної пари A_i, A_j таких елементів x не більше, ніж один). Так ми отримуємо граф з n вершинами та n ребрами. Він не може бути деревом, тому містить хоча б один цикл $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k,\ A_1,\ k \geqslant 3$. Тоді для деяких x_i маємо, що $A_i \setminus \{x_i\} = A_{i+1} \setminus \{x_i\},\ 1 \leqslant i \leqslant k$. Тут $A_{k+1} = A_1$, всі x_i різні.

Стартуючи з множини A_1, будемо послідовно міняти належність до даної множини елементів $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ (якщо x_i належало до множини, прибираємо його, і навпаки). Так послідовно отримуємо множини $A_2,\ A_3,\ \ldots A_k,\ A_1$. Якщо $x_1 \notin A_1$, то $x_1 \in A_2,\ x_1 \notin A_k$. Але належність x_1 не мінялася від множини A_2 до A_k, тому ми повинні отримати $x_1 \in A_k$. Аналогічно, якщо $x_1 \in A_1$, то $x_1 \notin A_2,\ x_1 \in A_k$, і знову отримуємо суперечність.

12. З другої, третьої та першої рівностей умови відповідно випливає, що

$$a = \frac{b^2+a^2}{c^2+a^2}, \quad b = \frac{c^2+b^2}{a^2+b^2}, \quad c = \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}.$$

Тому $a,\ b,\ c > 0,\ abc = 1$. Доведемо, що тоді

$$a^5 + b^5 \geqslant \frac{1}{2}ab(a+b)(a^2+b^2).$$

Оскільки $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$, досить довести, що

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \geqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2) \Leftrightarrow$$
$$2a^4 - 3a^3b + 2a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4 \geqslant 0.$$

Маємо, що

$$2a^4 - 3a^3b + 2a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4 = 2a^4 - 4a^3b + 2a^2b^2 + a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 + 2a^2b^2 - 4ab^3 + 2b^4 = 2a^2(a^2 - 2ab + b^2) + ab(a^2 - 2ab + b^2) + 2b^2(a^2 - 2ab + b^2) = (2a^2 + ab + 2b^2)(a-b)^2 \geqslant 0.$$

Використовуючи доведене маємо, що

$$\frac{a^2+b^2}{2a^5+2b^5+a^2+b^2} \leqslant \frac{a^2+b^2}{ab(a+b)(a^2+b^2)+a^2+b^2} = \frac{1}{ab(a+b)+1} = \frac{abc}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{a+b+c}.$$

Аналогічно доводимо, що

$$\frac{b^2+c^2}{2b^5+2c^5+b^2+c^2} \leqslant \frac{a}{a+b+c}, \quad \frac{c^2+a^2}{2c^5+2a^5+c^2+a^2} \leqslant \frac{b}{a+b+c}.$$

Додаючи отримані нерівності, маємо потрібну.

Інший спосіб розв'язання полягає в тому, що можна довести, що вказаним в умові задачі рівностям задовольняють лише числа $a = b = c = 1$. Очевидно, що для них потрібна нерівність виконується.

43 Міжнародна математична олімпіада

Міжнародна математична олімпіада 2002-го року проходила з 18 по 30 липня у Великій Британії, в місті Глазго. На це представницьке змагання прибуло 479 учнів з 84 країн (за положенням команда кожної країни може складатися не більше, ніж з 6 школярів).

Наші учасники були відібрані за підсумками Всеукраїнської олімпіади юних математиків та спеціальних відбірково-тренувальних зборів, що організовуються Міністерством освіти. До складу команди потрапили

Сергій Володько (Донецька обл., м. Краматорськ, СЗШ № 35),

Артем Дудко (м. Харків, ФМЛ № 27),

Тарас Матохнюк, (м. Вінниця, ліцей № 7)

Святослав Мельниченко, (м. Вінниця, ліцей № 7)

Микола Рибак (м. Миколаїв, Муніципальний колегіум)

Олександр Рибак (м. Київ, ліцей “Лідер”)

Т. Матохнюк закінчив в цьому році 10 клас, інші учні є випускниками середньої школи. С. Володько, А. Дудко та М. Рибак вже брали участь в Міжнародній математичній олімпіаді минулого року, отримавши там срібні медалі. Керівниками команди були В.О. Борисова (м. Київ, науково-методичний центр середньої освіти) та автор цієї статті.

Як завжди, в кожному з двох турів олімпіади пропонувалося по 3 задачі, на розв'язання яких надавалося по чотири з половиною години. Повне розв'язання кожної задачі оцінювалося в 7 балів. Таким чином, кожний школяр мав можливість набрати до 42 балів. За підсумками виконання робіт такий результат показали лише троє учнів — двоє з Китаю та один з Росії. Всі інші школярі набрали не більше 36 балів. Показавши саме такий результат, наш О. Рибак розділив 3–9 місця в загальному списку. Всі результати учасників команди України наведено в таблиці.

За підсумками олімпіади найкращі учні отримують медалі. 39 учасників, що набрали не менше 29 балів, отримали золоті медалі, 73 учні з 23-28 балами отримав срібні нагороди, 120 учасників з 14-22 балами — бронзові. Таким чином, наші школярі вибороли одну золоту та три срібні медалі. В неофіційному командному заліку наша команда посіла двадцяте місце. Тим самим ми маємо відступ назад у порівнянні з минулим роком, коли з однією золотою та п'ятьма срібними медалями команда України була восьмою. Зараз є очевидним, що були зроблені помилки при відборі команди, і це буде враховано при підготовці до наступних олімпіад.

Нам приємно відзначити, що однією з задач, відібраних для завдання учасникам олімпіади, була задача з України, і її автором є В.А. Ясінський (м. Вінниця). Задачі для Міжнародної олімпіади завчасно надсилаються до оргкомітету з різних країн, цього року всього було надіслано 130 задач з 41 країни. З цих задач організаторами складається список з 25-30 задач, що потім за кілька днів до олімпіади подається для розглядання керівникам команд-учасниць. Через тривале обговорення і складну систему голосувань відбирається варіант завдання, що має бути збалансованим за тематикою задач, складністю, певним чином враховувати можливості і найсильніших, і найслабших учасників. При цьому зберігається в секреті, яка країна які задачі запропонувала. Традиційно на шосте місце ставлять задачу, яку керівники вважають найскладнішою в завданні. В цьому році цю почесну позицію зайняла задача з України. При обговоренні особливо відмічалося, що ця задача не надає суттєвої переваги добре тренованим учням. Її розв’язання скоріше перевіряє вміння мислити, ніж наявність спеціальних знань та навичок.

Завжди міжнародна олімпіада — це не тільки змагання, а й можливість познайомитися з іншої країною, знайти друзів з усього світу. Учасники проживали в студентському містечку університету Страчклайд, маючи всі можливості для відпочинку і спілкування. Організатори надали школярам можливість здійснити дводенну подорож до Лондона. Шестигодинна подорож поїздом майже через всю країну, цікаві екскурсії і сильна спека південної Англії після прохолодної Шотландії — такими були враження наших учнів.

Наступна Міжнародна математична олімпіада буде проходити з 7 по 19 липня 2003 р. в Токіо, столиці Японії. Будемо сподіватись, що команда України найкращим чином підготується до цієї олімпіади.

Результати учасників команди України

Учасник	Задачі						Сума	Відзнака
	1	2	3	4	5	6		
С. Володько	7	6	1	7	2	0	23	Срібна медаль
А. Дудко	7	7	0	3	7	0	24	Срібна медаль
Т. Матохнюк	0	0	0	0	1	3	4	
С. Мельниченко	0	6	1	1	1	2	11	
М. Рибак	6	6	0	0	7	7	26	Срібна медаль
О. Рибак	7	6	1	7	2	0	36	Золота медаль

Результати виступу команд на 43-ій Міжнародній математичній олімпіаді

Місце	Країна	Бали	Медалі		
			Золоті	Срібні	Бронзові
1	Китай	212	6	-	-
2	Росія	204	6	-	-
3	США	171	4	1	-
4	Болгарія	167	3	2	1
5	В'єтнам	166	3	1	2
6	Південна Корея	163	1	5	-
7	Тайвань	161	1	4	1
8	Румунія	157	2	3	1
9	Індія	156	1	3	2
10	ФРН	144	2	1	2
11	Іран	143	-	4	2
12-13	Канада	142	1	3	1
12-13	Угорщина	142	1	2	3
14-15	Бєларусь	135	1	2	3
14-15	Туреччина	135	1	1	4
16-17	Казахстан	133	-	3	3
16-17	Японія	133	1	3	1
18	Ізраїль	130	-	3	3
19	Франція	127	-	2	3
20	Україна	124	1	3	-
21-23	Бразілія	123	-	1	5
21-23	Польща	123	-	4	1
21-23	Таїланд	123	-	2	2
24	Гонконг	120	1	2	2
25	Словаччина	119	-	2	4
26	Австралія	117	1	2	1
27	Велика Британія	116	-	2	2
28	Чехія	115	-	2	3
29	Югославія	114	-	1	5
30	Сінгапур	112	-	2	2
31	Аргентина	96	-	-	5
32	Південна Африка	90	-	1	3
33	Італія	88	-	-	5
34	Грузія	84	-	-	2

Місце	Країна	Бали	Медалі		
			Золоті	Срібні	Бронзові
35-36	Монголія	82	-	-	3
35-36	Нова Зеландія	82	1	-	-
37	Колумбія	81	-	-	3
38	Фінляндія	79	-	-	3
39	Куба	78	-	-	2
40-41	Естонія	75	-	2	-
40-41	Латвія	75	-	1	2
42	Литва	74	-	1	2
43	Македонія	73	-	1	1
44	Норвегія	72	1	-	1
45	Хорватія	70	-	-	2
46	Мексіка	67	-	-	3
47	Греція	62	-	-	2
48-50	Молдова	60	-	-	2
48-50	Швеція	60	-	-	2
48-50	Узбекистан	60	-	-	-
51	Перу (5)	59	-	-	2
52-53	Бельгія	58	-	-	1
52-53	Венесуела (5)	58	-	1	1
54	Нідерланди	55	-	-	1
55	Данія	53	-	-	-
56-57	Австрія	50	-	-	1
56-57	Макао	50	-	-	3
58	Словенія	46	-	-	1
59	Туркменістан	45	-	-	1
60-61	Іспанія	44	-	-	1
60-61	Швейцарія	44	-	-	1
62	Боснія та Герцеговина	42	-	-	1
63	Марокко	39	-	-	1
64	Індонезія	38	-	-	1
65	Азербайджан	37	-	-	1
66	Ісландія	36	-	-	-
67	Вірменія	33	-	-	-
68	Кіпр	29	-	-	-
69	Малайзія	26	-	-	-
70-71	Албанія	25	-	-	1
70-71	Ірландія	25	-	-	-

Місце	Країна	Бали	Медалі		
			Золоті	Срібні	Бронзові
72-73	Тринідад і Тобаго	22	-	-	-
72-73	Туніс	22	-	-	-
74	Філіппіни (5)	18	-	-	-
75-76	Киргизстан (4)	17	-	-	-
75-76	Пуерто-Ріко	17	-	-	-
77	Шрі Ланка (4)	16	-	-	-
78	Португалія	15	-	-	-
79	Люксембург (2)	12	-	-	-
82	Парагвай (2)	11	-	-	-
81	Гватемала (3)	4	-	-	-
82	Еквадор	3	-	-	-
83	Кувейт (4)	2	-	-	-
84	Уругвай (1)	1	-	-	-

Примітка. Якщо від країни виступало менше шести школярів, то в дужках вказується кількість членів команди.

Умови задач (в дужках вказано країну, що запропонувала задачу)

1. (Колумбія) Дане натуральне число n. Позначимо через T множину точок $(x,\ y)$ координатної площини, де x і y — невід'ємні цілі числа такі, що $x + y < n$. Кожну точку з T пофарбовано червоним або синім кольором. Якщо точка $(x,\ y)$ червона, то всі точки $(x',\ y')$ з T, для яких $x' \leqslant x$ і $y' \leqslant y$, також червоні. Назвемо X-множиною множину з n синіх точок, що мають різні координати x, а Y-множиною — множину з n синіх точок, що мають різні координати y. Довести, що кількість X-множин дорівнює кількості Y-множин.

2. (Південна Корея) Дане коло Γ з центром O і діаметром BC. Нехай A — точка на Γ така, що $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$, а D — середина тієї дуги AB, що не містить C. Пряма, що проходить через точку O паралельно DA, перетинає пряму AC в точці J. Серединний перпендикуляр відрізку OA перетинає Γ в точках E і F. Довести, що точка J — центр вписаного кола трикутника CEF.

3. (Румунія) Знайти всі пари натуральних чисел $m,\ n \geqslant 3$, для яких існує нескінченно багато натуральних чисел a таких, що число

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

ціле

4. (Румунія) Дане натуральне число n, більше 1. Позначимо через $d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_k$ всі його натуральні дільники так, що

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n.$$

Нехай $D = d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$.

а) Довести, що $D < n^2$.

б) Знайти всі n, для яких D — дільник числа n^2.

5. (Індія) Знайти всі функції $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такі, що

$$(f(x) + f(z))\,(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

для всіх дійсних $x,\ y,\ z,\ t$.

6. (Україна, автор — В. А. Ясінський, м. Вінниця) На площині розташовані кола $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \ldots\Gamma_n$ радіуса 1 кожне з центрами $O_1,\ O_2,\ \ldots,\ O_n$ відповідно; $n \geqslant 3$. Відомо, що будь-яка пряма площини має спільні точки не більше ніж з двома з цих кіл. Довести, що

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{O_iO_j} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Розв'язання задач

1. (С. Володько) З комбінаторного правила множення випливає, що кількість X-множин дорівнює добутку кількостей синіх точок у вертикалях $x = 0,\ x = 1,\ \ldots,\ x = n-1$, кількість Y-множин дорівнює добутку кількостей синіх точок в горизонталях $y = 0,\ y = 1,\ \ldots,\ y = n-1$.

Для кожного $k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1$, через j_k позначимо найбільше можливе значення таке, що точка з координатами $x = k,\ y = j_k$ червона. Якщо не існує червоних точок з $x = k$, то покладемо $j_k = -1$. Тоді з умови задачі випливає, що для кожного k червоними будуть точки $(k,\ 0),\ (k,\ 1),\ \ldots,\ (k,\ j_k)$.

Розглянемо спочатку ситуацію, коли всі точки T сині. Тоді твердження задачі виконується, оскільки відповідні кількості X-множин та Y-множин рівні $1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n = n!$ Далі будемо перефарбовувати точки в червоний колір в наступному порядку:

$(0,\,0),\quad (0,\,1),\quad \ldots,\quad (0,\,j_0)$
$(1,\,0),\quad (1,\,1),\quad \ldots,\quad (1,\,j_1)$
$\ldots$
$(n\text{-}1,\,0), (n\text{-}1,\,1), \ldots,\quad (n\text{-}1,\,j_{n-1})$

(Перефарбування завершуємо на останній вертикалі, де є червоні точки. Зрозуміло, що це може статися і до вертикалі $x = n-1$, а $j_{n-1} \leqslant 0$.)

Після кожного перефарбування фігура з червоних та синіх точок задовольняє умови задачі. При кожному перефарбуванні точки $(k,\ l)$ в добутку для визначення кількості X-множин множник $n-k-l$ замінюється на $n-k-l-1$ (адже змінюється кількість синіх точок лише в одній вертикалі і саме вказаним чином). Аналогічно і в добутку для визначення кількості Y-множин множник $n-k-l$ замінюється на $n-k-l-1$ (змінюється кількість синіх точок лише в одній горизонталі). Таким чином, після кожного перефарбування кількості X-множин та Y-множин залишаются рівними. Так буде і в кінці перефарбування, коли ми прийдемо до даної конфігурації синіх та червоних точок.

2. З того, що EF — серединний перпендикуляр AO випливає, що $AF = FO = AO$. Тому $\angle AOF = 60°$. Оскільки $\angle AO > 60°$, точка F лежить всередині кута AOC.

Точка A є серединою дуги EAF, тому CA є бісектрисою кута ECF. Також $OA = OC$, $\angle DOB = \angle AOB/2 = \angle ACO$, значить $OD \parallel JA$ і $ODAJ$ є паралелограмом. Маємо, що $AJ = OD = OE = AF$ та

$$\angle JFE = \angle JFA - \angle EFA = \angle AJF - \angle ECA = \angle AJF - \angle JCF = \angle JFC.$$

Тому JF є бісектрисою кута EFC, J є центром вписаного кола трикутника CEF.

3. (О. Рибак) Нехай m та n задовольняють умову задачі. Позначимо $f(x) = x^m + x - 1$ та $g(x) = x^n + x^2 - 1$, виконаємо ділення многочленів:

$$f(x)/g(x) = q(x) + r(x)/g(x),$$

де $q(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами, а степінь $r(x)$ менша за степінь $g(x)$. Знайдеться $x_0 > 0$ таке, що $r(x) < g(x)$ при $x > x_0$. З іншого боку, існує нескінченно багато натуральних $a > x_0$, для яких відношення $r(a)/g(a)$ повинно бути цілим числом. В цих випадках воно може бути лише нулем. Тоді $r(x)$ має нескінченну кількість коренів, і тому є тотожним нулем. Отже, многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $g(x)$.

Маємо, що $m \geqslant n$. Позначимо $m = n + k$. Тоді

$$x^m+x-1 = x^k(x^n+x^2-1)+x^k-x^{k+2}+x-1 = x^k g(x)+(1-x)(x^{k+1}+x^k-1).$$

Многочлен $x^k - x^{k+2} + x - 1$ має ділитися на $g(x)$. Оскільки $x = 1$ не коренем $g(x)$, то $x^{k+1} + x^k - 1$ має ділитися на $g(x)$. Тоді $k+1 \geqslant n \geqslant 3$, $k \geqslant 2$ і кожний корінь $g(x)$ є коренем $x^{k+1} + x^k - 1$.

Оскільки $g(0) < 0 < g(1)$, многочлен $g(x)$ має корінь $\alpha \in (0,\ 1)$, і тоді також ми повинні мати, що $\alpha^{k+1}+\alpha^k-1 = 0$. При $k \geqslant 3$ буде $\alpha^k < \alpha^2$, $\alpha^{k+1} \leqslant$

α^n (тут строга нерівність при $k+1 > n$), і тому $\alpha^{k+1}+\alpha^k-1 < \alpha^n+\alpha^2-1 = 0$. Залишається єдина можливість $k = 2$, $k+1 = n$. Маємо $n = 3$, $m = 5$ і перевіряємо, що

$$a^5 + a - 1 = (a^3 + a^2 - 1)(a^2 - a + 1).$$

Відповідь: $m = 5$, $n = 3$.

4. а) Якщо d — дільник n, то n/d — також дільник n, при цьому $d_i = n/d_{k+1-i}$. Також $d_i \geqslant i$. Тому

$$D = \sum_{i=1}^{k-1} d_i d_{i+1} = n^2 \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d_i d_{i+1}} \leqslant n^2 \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i(i+1)} =$$
$$n^2 \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = n^2 \left(1 - \frac{1}{k} \right) < n^2.$$

б) Якщо n — просте число, то $D = n$ і є дільником n^2. Нехай n — складене, позначимо через p його найменший простий дільник (це ж p буде і найменшим дільником n^2). Тоді $d_2 = p$, $d_{k-1} = n/p$, $D > d_{k-1}d_k = n^2/p$. Маємо, що $1 < n^2/D < p$. Отримали, що число n^2 має дільник n^2/D, менший за p. В цьому випадку отримали суперечність.

Відповідь: всі прості n.

5. (М. Рибак) Рівність, дану в умові, позначимо через (*). Покладемо в (*) $x = y = z = t = 0$. Отримаємо, що $4f^2(0) = 2f(0)$. Значить, $f(0) = 1/2$ або $f(0) = 0$.

Якщо $f(0) = 1/2$, то візьмемо в (*) $x = y = z = 0$ і прийдемо до $f(0) + f(t) = 1$, звідки $f(t) = 1/2$ для всіх t.

Якщо $f(0) = 0$, то, поклавши в (*) $z = t = 0$, отримаємо $f(xy) = f(x)f(y)$ (1). Наступна підстановка $x = y = 1$ дає, що $f(1) = 0$ або $f(1) = 1$.

При $f(1) = 0$, підставивши в (1) $y = 1$, отримаємо $f(x) = 0$ для всіх x.

Далі розглядаємо випадок $f(1) = 1$, також маємо $f(0) = 0$. Поклавши в (*) $x = 0$, $y = t = 1$, приходимо до $f(-z) + f(z) = 2f(z)$, тому $f(-z) = f(z)$ (2). Далі будемо розглядати f лише для невід'ємних значень аргумента, і за допомогою (2) довизначимо її для від'ємних x. З (1) при $x = y$ отримаємо, що $f(x^2) = f^2(x) \geqslant 0$. Введемо функцію $g(x) = \sqrt{f(x)}$, $x \geqslant 0$. З (1) маємо, що $g(xy) = g(x)g(y)$, звідки також $g(x^2) = g^2(x)$.

Поклавши в (*) $t = x, z = y$ прийдемо до $(f(x) + f(y))^2 = f(x^2 + y^2)$. Звідси $g(x^2+y^2) = g^2(x)+g^2(y) = g(x^2)+g(y^2)$. Таким чином, для будь-яких невід'ємних x, y $g(x + y) = g(x) + g(y)$ (3). Тому для будь-якого $u \geqslant x \geqslant 0$ буде $g(u) \geqslant g(x)$ (для перевірки досить покласти в (3) $y = u-x$ і використати невід'ємність g).

Відомо, що рівняння (3) (яке називається функційним рівнянням Коші) в класі неспадних функцій має лише розв'язки $g(x) = ax,\ a \geqslant 0$. Коротко нагадаємо відповідні міркування. З (3) отримаємо, що

$$g(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = g(x_1) + g(x_2) + \cdots + g(x_n), \quad n \geqslant 1. \tag{4}$$

Якщо покладемо $g(1) = a$, з (4) для будь-якого натурального n за допомогою підстановки $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ отримаємо $g(n) = an$. Поклавши в (4) $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = m/n,\ m \in \mathbf{N}$, будемо мати $g(m/n) = am/n$. Таким чином, для будь-якого раціонального невід'ємного x $g(x) = ax$. Припустимо, що існує $x \geqslant 0$ таке, що $g(x) \neq ax$, нехай $g(x) < ax$ (тут це можливо лише при $a \neq 0$). Існує раціональне число x' таке, що $g(x)/a < x' < x$. Тоді з монотонності g отримуємо, що $ax' = g(x') \leqslant g(x),\ x' \leqslant g(x)/a$. Отримали суперечність. Аналогічно розглядається випадок $g(x) > ax$. Тому $g(x) = ax,\ x \geqslant 0$. Оскільки $g(1) = 1$, буде $g(x) = x,\ f(x) = x^2$. Врахувавши (2), отримуємо $f(x) = x^2$ для всіх дійсних x.

Таким чином, ми отримали три можливі відповіді: $f(x) = 0,\ f(x) = 1/2,\ f(x) = x^2$. Перевірка показує, що кожна з цих функцій задовольняє умову.

Відповідь: $f(x) = 0,\ f(x) = 1/2,\ f(x) = x^2$.

6. З умови задачі випливає, що жодні два дані кола не перетинаються.

Розглянемо нове коло ω, що містить всередині себе всі дані кола. Для кожної пари даних кіл розглянемо пару їх спільних внутрішніх дотичних, кут між якими позначимо через 2α (див. перший малюнок).

Покладемо $d_{ij} = O_iO_j$. Тоді $\sin\alpha = \dfrac{1}{(d_{ij}/2)}$. Тоді $\alpha \geqslant \sin\alpha = \dfrac{2}{d_{ij}}$. Для кутових величин дуг маємо, що $\dfrac{\overset{\smile}{PQ} + \overset{\smile}{RS}}{4} \geqslant \dfrac{2}{d_{ij}}$. Тому $\dfrac{1}{d_{ij}} \leqslant \dfrac{\overset{\smile}{PQ} + \overset{\smile}{RS}}{8}$.

Розглянемо об'єднання всіх дуг $\overset{\smile}{PQ},\ \overset{\smile}{RS}$ по всіх парах $i,\ j$. Ми покажемо, що кожна точка ω може покриватися не більше, ніж $n-1$ такою дугою. Нехай T — це довільна точка ω, вона буде належати одній з дуг $\overset{\smile}{PQ},\ \overset{\smile}{RS}$, якщо існує промінь з початком в T, що перетинає обидва кола з центрами в O_i та O_j. Будемо розглядати промінь TU який обертається навколо точки T, як це показано на другому малюнку. Почнемо обертання з положення, при

якому TU є дотичною ω. В якийсь момент промінь вперше перетне пару кіл, позначимо їх ω_1 та ω_2. Промінь ніколи не буде перетинати три кола одночасно, тому перш ніж перетнути якесь наступне коло, він перестане перетинати хоча б одне з попередніх — нехай це буде ω_1. Надалі промінь вже ніколи ω_1 не перетне. Продовжуючи далі цей рух, отримаємо, що промінь може перетнути не більше ніж $(n-1)$ пару кіл: ω_1 та ω_2, ω_2 та ω_3, $\ldots$, ω_{n-1} та ω_n (кола пронумеровані по порядку їх перетину променем при обертанні). Отже, маємо не більше, ніж $(n-1)$ перекриття і тому

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{d_{ij}} \leqslant \frac{2\pi(n-1)}{8} = \frac{\pi(n-1)}{4}.$$

Зміст